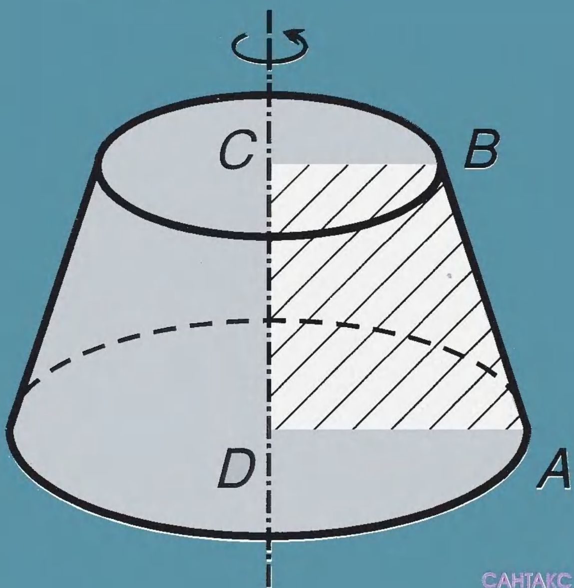
СТЕРЕОМЕТРИЯ

Атанасян Л. С.
Денисова Н. С.
Силаев Е. В.

КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ II



САНТАКС ПРЕСС

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Атанасян Л. С.
Денисова Н. С.
Силаев Е. В.

КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ II

Учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов и учащихся школ и классов с углубленным изучением математики

Москва
«Сантакс-Пресс»
1997

Предлагаемое учебное пособие является второй частью курса элементарной геометрии авторов Л. С. Атанасяна и др. Оно содержит восемь глав, в которых излагается стереометрия. Первая часть «Планиметрия» издана отдельной книгой издательством «Сантакс-Пресс».

Книга предназначена для студентов педагогических вузов, а также для учителей и учащихся школ и классов с углубленным изучением математики.

ISBN 5–88970–052–9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является второй частью курса элементарной геометрии. Эта книга, вместе с первой частью (см. [7])[1], охватывает весь курс элементарной геометрии, предназначенный для студентов физико-математических факультетов педагогических университетов и институтов. Курс может быть использован также учителями математики в средней школе и учениками школ (классов) с углубленным изучением математики.

Основные принципы, которыми руководствовались авторы при написании настоящего пособия, изложены в предисловии к первой части курса. Вторая часть курса посвящена стереометрии. Так же, как и первая часть, книга имеет своей целью помочь читателю привести в определенную систему свои знания школьного курса стереометрии и восполнить их новыми геометрическими фактами, которые могут быть использованы в преподавании стереометрии в средней школе как в обычных классах, так и в классах с углубленным изучением математики. Во второй части курса дополнительными темами, которые выходят за рамки школьного курса стереометрии, являются: более подробное изложение движений и подобий в пространстве, в частности, полная классификация движений в пространстве синтетическим методом, подробное изложение теории трехгранных углов, изложение элементов сферической геометрии.

---

[1] Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, помещенному на с. 285.

Так же, как и первая часть курса, настоящее пособие снабжено большим числом задач для самостоятельного решения. Во второй части имеется свыше 470 задач по стереометрии.

При изложении стереометрии авторы пользуются аксиометрическим методом. В основу положена система аксиом, на которой основан школьный курс стереометрии авторов Л. С. Атанасяна и др. (см. [8]), приложение).

Глава I

АКСИОМЫ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК, ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

1. Основные понятия. Аксиомы

Основным методом изучения свойств фигур в стереометрии, так же, как и в планиметрии, является аксиометрический метод. В нашем курсе при изучении геометрии в пространстве основными считаются понятия точки, прямой, плоскости (*основные объекты*), а также понятия: «точка лежит на прямой», «точка лежит в плоскости», «точка лежит между двумя точками», «наложение» (*основные отношения*). Определения основных понятий не даются. Все другие понятия, которые мы будем рассматривать в этом курсе, будем определять, исходя из основных понятий. Многие определения в стереометрии, например, определения простейших фигур — отрезка, луча, угла, полуплоскости, многоугольника,— полностью переносятся из курса планиметрии. Но в стереометрии мы вводим новые, пространственные фигуры, которых не было в планиметрии, например, полупространство, двугранный угол, многогранник и др.

Свойства основных понятий выражаются в предложениях, которые называются *аксиомами*. Они принимаются без доказательств в качестве исходных. Все остальные предложения геометрии выводятся из аксиом с помощью логических рассуждений, т. е. с помощью доказательств.

2. Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей

В стереометрии мы будем пользоваться теми же обозначениями для точек и прямых, что и в планиметрии. Плоскости будем обозначать малыми греческими буквами: $\alpha, \beta, \ldots, \pi, \sigma, \ldots$ Точки, прямые и плоскости могут находиться в определенных отношениях: точка может лежать на прямой, может не лежать на ней; точно так же точка может лежать в плоскости, может и не лежать в ней. Вместо того чтобы сказать «точка лежит на прямой» или «точка лежит в плоскости», говорят также «прямая проходит через точку» или «плоскость проходит через точку».

Система аксиом стереометрии состоит из 22 аксиом, которые разделены на пять групп. Сформулируем первую группу аксиом — аксиомы принадлежности, которые характеризуют взаимное расположение точек, прямых и плоскостей.

I_1. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки[1], а в каждой плоскости — по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_2. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

I_4. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Прямая, проходящая через две точки A и B, обозначается через AB или BA. Аналогично, плоскость, проходящая через три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, обозначается через ABC, BCA, CAB и т. д.

I_5. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

Если все точки прямой a лежат в плоскости α, то говорят, что *прямая a лежит в плоскости α* или плоскость α проходит через прямую a.

I_6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

В таком случае говорят, что *две плоскости пересекаются по прямой.*

I_7. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Из аксиомы I_3 следует, что две прямые либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют только одну общую точку. В последнем случае говорят, что *прямые пересекаются.*

Из аксиомы I_5 следует, что если прямая не лежит

---

[1] Так же, как и в планиметрии, говоря «три точки», «две прямые», «две плоскости» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые, плоскости и т. д. попарно различны.

в плоскости, то она имеет с плоскостью не более одной общей точки. Говорят, что прямая и плоскость *пересекаются*, если они имеют только одну общую точку.

Из аксиомы I_7 следует, что какова бы ни была плоскость, существует хотя бы одна точка, не лежащая в этой плоскости.

Теорема 1. *Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.*

□ Пусть a — данная прямая, а A — точка, не лежащая на ней. По аксиоме I_1 на прямой a лежат по крайней мере две точки B и C. Точки A, B и C не лежат на одной прямой, поэтому, согласно аксиоме I_4, через эти точки проходит некоторая плоскость α. По аксиоме I_5 прямая a лежит в плоскости α. Таким образом, плоскость проходит через прямую a и точку A.

Докажем теперь, что α — единственная плоскость, проходящая через прямую a и точку A. В самом деле, если какая-то плоскость β проходит через прямую a и точку A, то она проходит через точки B и C, поэтому плоскость β совпадает с плоскостью α, так как по аксиоме I_4 через точки A, B и C, которые не лежат на одной прямой, проходит только одна плоскость. ■

Предлагаем читателю, используя эту теорему, самостоятельно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.*

§ 2. ОТРЕЗОК, ЛУЧ, ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ПОЛУПРОСТРАНСТВО

1. Аксиомы порядка

Каждая точка прямой может находиться в известном отношении к любым двум точкам той же прямой: она может лежать между этими точками, может и не лежать между ними. Если точка B лежит между точками A и C, то пишут так: $A - B - C$. Свойства этого понятия характеризуются аксиомами порядка, которые сформулированы ниже.

II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C — три различные точки некоторой прямой и точка B лежит также между точкой C и точкой A.

II_2. Из трех точек прямой одна и только одна точка лежит между двумя другими.

Понятие отрезка в стереометрии вводится точно так же, как и в планиметрии: *отрезком* AB (или BA) называется фигура, состоящая из двух точек A и B и всех точек, лежащих между ними. Точки A и B называются *концами* отрезка, а любая точка, лежащая между ними,— *внутренней* точкой отрезка AB.

II_3. Каждая точка O, лежащая на прямой, разделяет множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками разных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, на которые точка O разделяет остальные точки данной прямой, называется *лучом, исходящим из точки* O. Два луча одной прямой, исходящие из точки O, называются *дополнительными лучами*. Иногда говорят, что каждый из двух дополнительных лучей является *продолжением* другого луча.

Таким образом, аксиома дополнительных лучей, сформулированная нами в планиметрии (см. [7] § 2, аксиома II_3), имеет место на любой прямой пространства. Аналогично, аксиома о полуплоскостях (см. [7] § 2, аксиома II_4) имеет место в любой плоскости пространства.

II_4. Каждая прямая a, лежащая в плоскости α, разделяет множество всех точек плоскости α, не лежащих на прямой a, на два подмножества так, что отрезок, соединяющий любые две точки разных подмножеств, имеет с прямой a только одну общую внутреннюю точку, а отрезок, соединяющий любые две точки одного и того же подмножества, не имеет общих точек с прямой a.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, на которые прямая a разделяет точки плоскости α, не принадлежащие прямой a, называется *полуплоскостью плоскости* α. Прямая a называется *границей* каждой из этих полуплоскостей.

Если отрезок AB пересекается с плоскостью α (т. е. имеет с плоскостью α только одну общую внутреннюю точку), то говорят, что *точки* A и B *лежат по разные* *стороны от плоскости* α, и пишут так: $A, B \div \alpha$, а если отрезок AB не имеет с плоскостью α ни одной общей точки, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от плоскости α, и пишут так: $A, B \doteq \alpha$.

Сформулируем последнюю аксиому группы II.

II_5. Каждая плоскость α разделяет множество всех точек пространства, не лежащих в этой плоскости, на два подмножества так, что любые две точки разных подмножеств лежат по разные стороны от плоскости α, а любые две точки одного и того же подмножества лежат по одну сторону от плоскости α.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, указанных в аксиоме II_5, называется *полупространством.* Плоскость называется границей каждого из этих полупространств. Фигура, которая состоит из всех точек данного полупространства и всех точек его границы, называется *замкнутым полупространством*.

2. Следствия из аксиом групп I и II

Нетрудно видеть, что в стереометрии на каждой плоскости выполняются все аксиомы групп I и II планиметрии, приведенные в § 1 и § 2 [7]. В самом деле, если σ — произвольная плоскость пространства, то в силу аксиом I_1 и I_3 стереометрии и аксиом II_1—II_4 на плоскости σ выполняются все аксиомы I_1—I_3, II_1—II_4 планиметрии (см. [7] § 1 и § 2). Отсюда следует важный вывод: все понятия, которые были введены в § 1—3 [7], а также все утверждения и теоремы, доказанные в этих параграфах, имеют место на плоскости σ, т. е. на каждой плоскости пространства.

В частности, теорема 2 § 3 [7] имеет место в стереометрии.

Теорема (предложение Паша). *Пусть три точки A, B, C и прямая a лежат в одной плоскости. Если прямая a пересекает отрезок AB и не проходит через точку C, то она пересекает один из отрезков AC или BC и не имеет общих точек с другим отрезком.*

Отметим, что понятие угла в стереометрии вводится точно так же, как и в планиметрии: *углом* называется геометрическая фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Угол называется *развернутым*, если его стороны являются дополнительными лучами. Если угол hk неразвернутый, то существует одна и только одна плоскость, в которой лежат его стороны. Она называется *плоскостью неразвернутого угла hk*. У каждого неразвернутого угла имеется внутренняя область, которая является бесконечным выпуклым множеством точек плоскости этого угла. Фигуру, состоящую из неразвернутого угла и его внутренней области, также называют углом. В стереометрии под неразвернутым углом мы понимаем именно такую фигуру.

Далее, понятие внутреннего луча угла и все утверждения, связанные с этим понятием, имеют место в стереометрии. Особо отметим теорему 1 § 4 [7] о внутреннем луче угла, которой часто пользуются в стереометрии: *внутренний луч неразвернутого угла пересекает любой отрезок, концы которого лежат на разных сторонах угла.*

В заключение отметим, что отрезок, луч, прямая, плоскость, полуплоскость и полупространство являются выпуклыми фигурами, содержащими бесконечное множество точек.

§ 3. АКСИОМЫ НАЛОЖЕНИЯ. РАВЕНСТВО ФИГУР

1. Аксиомы равенства фигур

Понятие равенства фигур вводится с помощью наложения, которое в нашем курсе является основным отношением. Предполагается, что могут существовать отображения пространства в себя, которые называются *наложениями*. Свойства наложений выражены в аксиомах группы III (аксиомы наложения), состоящей из семи аксиом. Для упрощения формулировок этих аксиом введем понятие равенства фигур в пространстве. Фигура Φ называется *равной* фигуре Φ', если существует наложение, при котором фигура Φ переходит в фигуру Φ', т. е. каждая точка фигуры Φ переходит в некоторую точку фигуры Φ' и каждая точка фигуры Φ' имеет прообраз, принадлежащей фигуре Φ. Запись $\Phi = \Phi'$ означает, что фигура Φ равна фигуре Φ'.

III_1. Каждая фигура равна самой себе.

III_2. Если фигура Φ равна фигуре Φ', то фигура Φ' равна фигуре Φ.

III_3. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.

III_4. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка $A'B'$, то отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$.

Рассмотрим некоторые свойства наложений, которые вытекают из сформулированных выше четырех аксиом.

1^0. *При наложении различные точки переходят в различные точки.*

2^0. *При наложении три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.*

Эти свойства доказываются точно так же, как и соответствующие свойства в планиметрии (см. [7] § 5, п. 1), поэтому их доказательства мы опускаем.

Из свойства 1^0 и аксиомы III_4 следует, что при наложении отрезок отображается на отрезок, причем концы отрезка отображаются в концы отрезка. Поэтому фигура, равная отрезку, является отрезком.

III_5. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Пользуясь этой аксиомой точно так же, как и в планиметрии, доказывается следующее свойство:

3^0. *Если при наложении две точки A и B переходят соответственно в точки A' и B', то луч AB переходит в луч $A'B'$, а прямая AB — в прямую $A'B'$.*

4^0. *Если при наложении три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, переходят в точки A', B' и C', то плоскость ABC переходит в плоскость $A'B'C'$.*

□ Пусть f — данное наложение. Так как точки A, B и C по условию не лежат на одной прямой, то по свойству 2^0 точки A', B' и C' также не лежат на одной прямой.

Докажем сначала, что любая точка M плоскости ABC переходит в точку M', лежащую в плоскости $A'B'C'$. Для этого через точку M проведем прямую так, чтобы она пересекала два из отрезков AB, BC, CA. Пусть, например, эта прямая пересекает отрезок AB в точке P, а отрезок BC — в точке Q. По аксиоме III_4 точки $P' = f(P)$ и $Q' = f(Q)$ лежат соответственно на отрезках $A'B'$ и $B'C'$. По свойству 3^0 прямая PQ переходит в прямую $P'Q'$, поэтому точка M переходит в некоторую точку M' прямой $P'Q'$. Так как прямая $P'Q'$ лежит в плоскости $A'B'C'$, то точка M' лежит в плоскости $A'B'C'$.

Докажем теперь, что любая точка M' плоскости $A'B'C'$ является образом некоторой точки плоскости ABC. По аналогии с предыдущим проведем через точку M' прямую так, чтобы она пересекала два из отрезков $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ в двух точках P' и Q'. По аксиоме III_4 точки P' и Q' имеют прообразы, лежащие в плоскости ABC, поэтому по свойству 3^0 точка M' имеет прообраз, лежащий в этой плоскости. ■

5^0. *При наложении четыре точки, не лежащие в одной плоскости, переходят в четыре точки, также не лежащие в одной плоскости.*

□ Пусть при данном наложении f четыре точки A, B, C, и D, не лежащие в одной плоскости, переходят в четыре точки A', B', C' и D'. Так как точки A, B и C не лежат на одной прямой, то по свойству 2^0 точки A', B', C' не лежат на одной прямой, а по свойству 4^0 плоскость ABC переходит в плоскость $A'B'C'$. Отсюда следует, что образ D' точки D, не лежащей в плоскости ABC не может лежать в плоскости $A'B'C'$. Так как через точки A', B', C' проходит только одна плоскость, то точки A', B', C', D' не лежат в одной плоскости. ■

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 1. *Любое наложение является преобразованием пространства.*

□ Учитывая свойство 1^0, достаточно доказать, что каждая точка M' пространства является образом некоторой точки. Пусть A, B, C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости, а A', B', C' и D' — их образы. По свойству 5^0 точки A', B', C' и D' не лежат в одной плоскости.

Через точку M' проведем прямую, пересекающую какие-нибудь две из плоскостей $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'D'C'$, $B'C'D'$ в различных точках, например, плоскости $A'B'C'$ и $A'B'D'$ соответственно в точках P' и Q'. По свойству 4^0 плоскости ABC и ABD переходят соответственно в плоскости $A'B'C'$ и $A'B'D'$, поэтому точки P' и Q' являются образами некоторых точек P и Q, лежащих в этих плоскостях. Но тогда по свойству 3^0 точка M' является образом некоторой точки M прямой PQ. ■

2. Образы простейших фигур при наложении

Теорема 2. *При наложении прямая переходит в прямую, а плоскость — в плоскость.*

□ Пусть f — данное наложение. Рассмотрим произвольную прямую a и возьмем на ней две точки A и B. Пусть $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. По свойству 3^0 прямая a переходит в прямую $A'B'$.

Рассмотрим теперь произвольную плоскость α и возьмем на ней три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Пусть $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. По свойству 2^0 точки A', B' и C' не лежат на одной прямой, и по свойству 4^0 плоскость α переходит в плоскость $A'B'C'$. ■

6^0. *При наложении полуплоскость с границей a переходит в какую-нибудь из полуплоскостей с границей a', где a' — образ прямой a.*

□ Пусть f — данное наложение. Рассмотрим полуплоскость λ с границей a. Возьмем две точки M и N на прямой a и точку P полуплоскости λ. Ясно, что точки M, N и P не лежат на одной прямой, поэтому по свойству 4^0 при наложении f плоскость MNP переходит в плоскость $M'N'P'$, где $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, $P' = f(P)$, а по свойству 3^0 прямая MN — в прямую $M'N'$. Таким образом, прямая $M'N'$ совпадает с прямой a'.

Обозначим через λ' полуплоскость с границей $M'N'$, содержащую точку P', и докажем, что $\lambda' = f(\lambda)$.

Пусть X — произвольная точка полуплоскости λ, отличная от точки P, а $X' = f(X)$. Ясно, что X' — точка плоскости $M'N'P'$, не лежащая на прямой $M'N'$. По аксиоме III_4 при наложении f отрезок PX отображается на отрезок $P'X'$, поэтому, так как отрезок PX не имеет общих точек с прямой MN, отрезок $P'X'$ не может иметь общих точек с прямой $M'N'$, т. е. $X' \in \lambda'$. Обратно, пусть Y' — произвольная точка полуплоскости λ', а Y — ее прообраз. Ясно, что Y — точка плоскости MNP, не лежащая на прямой MN.

Аналогично предыдущему доказывается, что $Y \in \lambda$. Таким образом, $\lambda' = f(\lambda)$. ■

Предлагаем читателю по аналогии с доказательством утверждения 6^0, используя теорему 1, доказать следующее утверждение:

7^0. *При наложении полупространство с границей* α *переходит в одно из полупространств с границей* α', *где* α' *— образ плоскости* α.

3. Аксиомы равенства углов

Из свойства 3^0 следует, что при наложении луч переходит в луч, а начало луча — в начало луча. Отсюда, учитывая свойства 2^0 и 3^0, мы приходим к выводу, что при наложении неразвернутый угол переходит в неразвернутый угол, а развернутый — в развернутый угол. Поэтому фигура, равная неразвернутому (развернутому) углу, является неразвернутым (развернутым) углом.

III_6. Если плоскости неразвернутых углов hk и $h'k'$ являются соответственно границами полупространств P и P' и $\angle\, hk = \angle\, h'k'$, то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h', луч k — в луч k', полупространство P — в полупространство P'.

Из аксиомы III_6 непосредственно следует утверждение, которым мы в дальнейшем часто будем пользоваться.

III_6^*. Если неразвернутый угол hk равен неразвернутому углу $h'k'$, то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h', а луч k — в луч k'.

Будем говорить, что угол hk отложен от луча h в полуплоскость λ, если луч h принадлежит границе полуплоскости λ, а луч k — самой полуплоскости.

III_7. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

4. Выполнение аксиом наложения планиметрии на каждой плоскости

Отметим, что на каждой плоскости пространства, наряду с аксиомами групп I и II планиметрии, выполняются также все аксиомы группы III планиметрии (см. [7] § 5). Для обоснования этого утверждения необходимо выяснить, как следует понимать наложение на каждой плоскости пространства, исходя из понятия наложения трехмерного пространства.

Пусть σ — произвольная плоскость. По теореме 2 при любом наложении пространства плоскость σ переходит в некоторую плоскость σ'. Если плоскости σ и σ' совпадают, то данное наложение порождает на плоскости σ некоторое преобразование, которое и будем называть наложением на плоскости σ. В соответствии с этим, если фигуры F_1 и F_2 принадлежат плоскости σ, то будем говорить, что *фигура F_1 равна фигуре F_2 на плоскости σ*, если существует наложение на плоскости σ, которое фигуру F_1 переводит в фигуру F_2. Очевидно, если фигуры F_1 и F_2 равны на плоскости σ, то они равны в смысле, указанном в п. 1. Можно доказать и обратное утверждение.

Нетрудно теперь убедиться в том, что на плоскости σ выполняются все аксиомы III_1—III_7 планиметрии, сформулированные в § 5 [7]. Читателю, желающему более подробно познакомиться с этим вопросом, рекомендуем прочитать § 9 учебного пособия [5].

Из предыдущего изложения следует важный вывод: все понятия, которые были введены на основании аксиом групп I, II, III планиметрии, а также все теоремы и утверждения, доказанные на основании этих аксиом, имеют место на каждой плоскости пространства.

§ 4. СРАВНЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

1. Сравнение отрезков и углов

Теория сравнения отрезков и углов в пространстве аналогична соответствующей теории на плоскости. Пусть AB и CD — данные отрезки, расположенные в пространстве. Если на отрезке CD существует такая точка M, что $AB = CM$, то говорят, что отрезок AB *меньше* отрезка CD или отрезок CD *больше* отрезка AB, и пишут так: $AB < CD$ или $CD > AB$.

Все утверждения, сформулированные в [7] § 6, п. 1, верны и для отрезков, которые необязательно лежат в одной плоскости.

Аналогично вводятся понятия «больше» и «меньше» для углов в пространстве. Пусть hk и lm — данные неразвернутые углы. Если существует внутренний луч s угла lm такой, что $\angle hk = \angle ls$, то говорят, что угол hk *меньше* угла lm или угол lm *больше* угла hk, и пишут $\angle hk < \angle lm$ или $\angle lm > \angle hk$. В случае, когда один из углов hk или lm развернутый, считается, что развернутый угол больше неразвернутого угла.

Все утверждения, сформулированные в [7] § 6, п. 2, верны и для углов, плоскости которых необязательно совпадают.

2. Смежные и вертикальные углы

Напомним определения смежных и вертикальных углов. Два неразвернутых угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие стороны являются дополнительными лучами. Два неразвернутых угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются соответственно дополнительными лучами сторон другого угла.

Теоремы о смежных и вертикальных углах, доказанные нами в планиметрии, имеют место и в стереометрии.

Теорема 1. *Если неразвернутые углы равны, то углы, соответственно смежные с ними, также равны.*

□ Пусть $\angle h_1k_1 = \angle h_2k_2$, а $\angle h_1'k_1$ и $\angle h_2'k_2$ — углы, соответственно смежные с углами h_1k_1 и h_2k_2. Докажем, что $\angle h_1'k_1 = \angle h_2'k_2$.

Согласно утверждению III_6^* (см. § 3) существует наложение f такое, что $h_2 = f(h_1)$, $k_2 = f(k_1)$. Так как при наложении прямая переходит в прямую, то из равенства $h_2 = f(h_1)$ следует, что $h_2' = f(h_1')$, поэтому $\angle h_1'k_1 = \angle h_2'k_2$. ■

Теорема 2. *Вертикальные углы равны.*

□ Рассмотрим вертикальные углы hk и $h'k'$, где h и h', а также k и k' — дополнительные лучи. Угол hk' является смежным как с углом hk, так и с углом $h'k'$. Так как $\angle hk' = \angle hk'$ (аксиома III_1), то по теореме 1 $\angle hk = \angle h'k'$. ■

3. Перпендикулярные прямые

Прямой угол в пространстве определяется точно так же, как и на плоскости: угол называется *прямым*, если он равен каждому из углов, смежных с ним. Точно так же, как и в планиметрии, доказываются следующие два утверждения о прямых углах, расположенных как в одной плоскости, так и в разных плоскостях: а) угол, равный прямому углу, является прямым углом; б) любые два прямых угла равны друг другу.

Угол, меньший прямого угла, называется *острым*. Неразвернутый угол, больший прямого угла, называется *тупым*.

Две пересекающиеся прямые пространства называются *перпендикулярными* (взаимно перпендикулярными), если они при пересечении образуют четыре прямых угла. Отсюда, учитывая, что на любой плоскости выполняются все аксиомы групп I, II, III планиметрии, мы приходим к выводу, что следующая теорема о перпендикулярных прямых, доказанная в [7] § 8, п. 1, и следствие из этой теоремы имеют место в любой плоскости пространства.

Теорема 3. *В данной плоскости через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой этой плоскости, и притом только одна.*

Следствие. *Две прямые, лежащие в одной плоскости и перпендикулярные к третьей прямой этой плоскости, не пересекаются.*

§ 5. ТРЕУГОЛЬНИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Равенство треугольников

Напомним, что в планиметрии многоугольником называют замкнутую ломаную, смежные звенья которой не лежат на одной прямой, а несмежные звенья не имеют общих точек. В [7] § 23 было отмечено, что фигуру, состоящую из многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником. В стереометрии под многоугольником мы будем понимать именно такую фигуру. В частности, треугольником ABC называем фигуру, которая состоит из отрезков AB, BC, CA с концами в точках A, B и C, не лежащих на одной прямой, и множества точек $\lambda_A \cap \lambda_B \cap \lambda_C$ (внутренняя область треугольника) (рис. 1). Здесь λ_A, λ_B, λ_C — полуплоскости треугольника. Например,

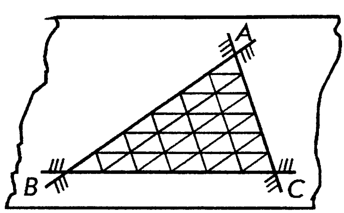


РИС. 1

λ_A — полуплоскость с границей BC, содержащая точку A.

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Если при наложении f вершины треугольника ABC переходят соответственно в точки A', B' и C', то при этом наложении треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C'$.*

□ По свойству 2° § 3 точки A', B' и C' не лежат на одной прямой. Докажем, что $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$. По аксиоме III_4 отрезки AB, BC, CA переходят соответственно в отрезки $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. По свойству 6° § 3 полуплоскости λ_A, λ_B, λ_C треугольника ABC переходят соответственно в полуплоскости $\lambda_{A'}$, $\lambda_{B'}$, $\lambda_{C'}$ треугольника $A'B'C'$, и, следовательно, множество $\lambda_A \cap \lambda_B \cap \lambda_C$ переходит в множество $\lambda_{A'} \cap \lambda_{B'} \cap \lambda_{C'}$, т. е. внутренняя область треугольника ABC переходит во внутреннюю область треугольника $A'B'C'$. Таким образом, треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C'$. ■

Из этой леммы следует, что при любом наложении треугольник переходит в треугольник.

2. Признаки равенства треугольников

Можно доказать, что все три признака равенства треугольников, известные нам из курса планиметрии, имеют место в стереометрии для треугольников, расположенных как в одной плоскости, так и в разных плоскостях. Доказательства этих признаков в стереометрии совершенно аналогичны доказательствам соответствующих теорем на плоскости. В качестве примера докажем первый признак равенства треугольников.

Теорема 1. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

□ Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C'$, у которых $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, расположенные в плоскостях α и α', и докажем, что $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Углы A и A' равны, поэтому существует наложение f такое, что луч AB переходит в луч $A'B'$, а луч AC — в луч $A'C'$ (утверждение III_6^*). Так как $AB = A'B'$, то по аксиоме III_5 $B' = f(B)$. Аналогично $C' = f(C)$. По предыдущей лемме $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$, т. е. $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$. ■

Используя эту теорему, легко убедиться в том, что доказательства второго и третьего признаков равенства треугольников, приведенные в курсе планиметрии (см. [7] § 9, теорема 2 и § 13, теорема 1), применимы к треугольникам, расположенным в пространстве произвольно. Таким образом, имеют место следующие две теоремы.

Теорема 2. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 3. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

3. Виды треугольников

Из предыдущего изложения ясно, что все свойства соотношений сторон и углов треугольника, доказанные в планиметрии, имеют место для треугольника и в стереометрии. В частности, справедлива теорема о внешнем угле треугольника (см. [7] § 10, п. 1), из которой непосредственно следует, что если один из углов треугольника прямой или тупой, то два других угла острые. Поэтому разделение треугольников на классы в зависимости от их углов (остроугольные, прямоугольные, тупоугольные треугольники) или от их сторон (разносторонние, равнобедренные, равносторонние треугольники) и свойства каждого из этих классов полностью переносятся на треугольники в пространстве.

Напомним теорему о соотношениях между сторонами и углами треугольника, которая часто используется в стереометрии: в треугольнике против большей стороны лежит больший угол; обратно, против большего угла лежит большая сторона. Отсюда непосредственно следует, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета. В стереометрии часто используется также и теорема о неравенстве треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Понятия середины отрезка и биссектрисы угла, а также теоремы о середине отрезка и биссектрисе угла, доказанные в курсе планиметрии, имеют место и в пространстве (см. [7] § 11). Точно так же, как и в планиметрии, вводятся понятия медианы, биссектрисы и высоты треугольника, и эти понятия широко используются в стереометрии.

Напомним, что треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника. Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда два его угла равны. Далее, биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведенные к основанию, совпадают. Особо отметим теорему 2 § 12 [7]: если какие-нибудь два из трех отрезков — биссектриса, медиана и высота, проведенные к одной стороне треугольника, совпадают, то все три отрезка совпадают и треугольник является равнобедренным.

4. Признаки равенства прямоугольных треугольников

В заключение отметим, что все признаки равенства прямоугольных треугольников, рассмотренные нами в курсе планиметрии, имеют место и в стереометрии для треугольников, расположенных как в одной плоскости, так и в разных плоскостях. Другими словами, имеет место следующая теорема о равенстве прямоугольных треугольников:

Теорема 4. *Прямоугольные треугольники ABC и $A'B'C'$ с прямыми углами C и C' равны, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1. $AC = A'C'$, $BC = B'C'$; 2. $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$; 3. $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$; 4. $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$; 5. $AB = A'B'$, $BC = B'C'$.

Первые два признака непосредственно следуют из теорем 1 и 2, а остальные признаки предлагаем читателю доказать самостоятельно.

§ 6. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

1. Измерение отрезков

Напомним постановку задачи измерения отрезков (см. [7] § 14). Пусть каждому отрезку соответствует определенное положительное число так, что выполняются условия:

$Д_1$. Равным отрезкам соответствует одно и то же число.

$Д_2$. Если точка B лежит на отрезке AC и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AC соответствует число $a + b$.

$Д_3$. Некоторому отрезку PQ соответствует число, равное единице.

Число, указанным образом соответствующее каждому отрезку, называется *длиной* этого отрезка. Отрезок PQ называется *единицей измерения* или *единичным отрезком.*

Так же, как и в планиметрии, в качестве аксиом измерения отрезков (группа IV) принимаем следующие два предложения.

IV_1. (Аксиома существования длины отрезка). При произвольно выбранном единичном отрезке каждый отрезок имеет определенную длину.

IV_2. (Аксиома существования отрезка данной длины). Для любого вещественного положительного числа a существует отрезок, длина которого при выбранном единичном отрезке, равна a.

Теория измерения отрезков, изложенная в § 14 [7], полностью переносится на пространство. Поэтому мы не приводим здесь эту теорию и предлагаем читателю повторить материал, изложенный в § 14, которым будем пользоваться в дальнейшем изложении.

2. Измерение углов

Напомним, как вводится понятие меры угла. Пусть каждому неразвернутому углу соответствует определенное положительное число так, что выполняются условия:

1. Равным углам соответствует одно и то же число.
2. Если l — внутренний луч угла hk и углам hl и lk соответствуют числа α и β, то углу hk соответствует число $\alpha + \beta$.
3. Некоторому неразвернутому углу p_0q_0 соответствует число, равное единице.

Число, указанным образом соответствующее каждому углу, называется *мерой* этого угла. Угол p_0q_0 называется *единицей измерения* углов.

Пользуясь аксиомой групп I, II, III и IV, можно доказать существование и однозначную определенность меры угла.

Так же, как и в планиметрии, будем считать, что мера любого развернутого угла равна 2ω, где ω — мера прямого угла при выбранной единице измерения углов.

В геометрии пользуются различными единицами измерения углов, однако наиболее распространенной является градусная мера угла, где за единицу измерения принимается угол, равный 1°, т. е. $\frac{1}{90}$ части прямого угла. При этом, очевидно, градусная мера прямого угла равна 90°, а мера развернутого угла равна 180°. Отметим, что числовое значение α градусной меры любого угла заключено в пределах $0 < \alpha \leqslant 180$. Обратно, если действительное число α удовлетворяет этим неравенствам, то существует угол, градусная мера которого равна α^0. В дальнейшем изложении будем пользоваться только градусной мерой угла.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

1. Доказать, что через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость.

2. Три прямые попарно пересекаются и не лежат в одной плоскости. Доказать, что эти прямые проходят через одну точку пространства.

3. Даны три точки A, B и C и плоскость α, которая пересекает отрезок AB и не проходит через точку C. Доказать, что плоскость α пересекает один из отрезков CA или CB и не имеет общих точек с другим отрезком.

4. Даны четыре точки A, B, C, D и плоскость α, которая пересекает отрезок AB и не проходит через точки C и D. Доказать, что плоскость α пересекает либо все три отрезка BC, CD и DA, либо один и только один из этих отрезков.

5. Доказать, что отрезок, луч, прямая, полуплоскость, полупространство являются выпуклыми фигурами, которые содержат бесконечное множество точек.

6. Начало луча лежит на границе полупространства, а некоторая его точка принадлежит этому полупространству. Доказать, что все точки луча принадлежат полупространству.

7. Точки A и B лежат по разные стороны от плоскости α. Доказать, что любая ломаная, соединяющая точки A и B, имеет хотя бы одну общую точку с плоскостью α.

8. Граница полуплоскости λ лежит в плоскости α, но хотя бы одна из точек этой полуплоскости не лежит в плоскости α. Доказать, что все точки полуплоскости λ принадлежат одному и тому же полупространству с границей α.

9. Две полуплоскости λ_1 и λ_2 имеют общую границу a и не лежат в одной плоскости. Плоскость α проходит через прямую a, не содержит данные полуплоскости и пересекает отрезок AB, где $A \in \lambda_1$, $B \in \lambda_2$. Доказать, что плоскость α пересекает любой отрезок, один конец которого лежит в полуплоскости λ_1, а другой — в полуплоскости λ_2.

10. Две плоскости пересекаются по прямой p, прямая a пересекает каждую из этих плоскостей, причем точки пересечения не совпадают. Доказать, что прямые p и a не лежат в одной плоскости.

11. Доказать, что при наложении две различные точки переходят в две различные точки.

12. Доказать, что при наложении три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.

13. При наложении две точки A и B переходят соответственно в точки A' и B'. Доказать, что при этом наложении луч AB переходит в луч $A'B'$, а прямая AB — в прямую $A'B'$.

14. Доказать, что при наложении: а) луч переходит в луч, а начало луча — в начало луча; б) неразвернутый угол переходит в неразвернутый угол, а вершина угла — в вершину угла.

15. Доказать, что при наложении полупространство с границей α переходит в одно из полупространств с границей α', где α' — образ плоскости α.

16. Даны два наложения f_1 и f_2. Известно, что для двух данных точек A и B $f_1(A) = f_2(A)$, $f_1(B) = f_2(B)$. Доказать, что для любой точки M прямой AB $f_1(M) = f_2(M)$.

17. На плоскости α даны равные отрезки AB и CD. Доказать, что существует наложение, при котором

плоскость α переходит в себя, точка A — в точку C, а точка B — в точку D.

18. Две плоские фигуры F_1 и F_2, лежащие в плоскости α, равны друг другу. Доказать, что существует наложение, при котором плоскость α переходит в себя, а фигура F_1 — в фигуру F_2.

19. Доказать, что в пространстве любые два развернутых угла равны.

20. Даны два неразвернутых угла, плоскости которых не совпадают. Доказать, что: а) если данные углы равны друг другу и один из них прямой, то и второй угол — прямой; б) если оба угла прямые, то они равны друг другу.

21. При наложении данные четыре точки переходят в те же четыре точки, причем образ хотя бы одной из них не совпадает с самой точкой. Доказать, что среди шести отрезков, попарно соединяющих данные точки, какие-то два отрезка равны, а из оставшихся четырех отрезков какие-то два отрезка также равны.

22. Точки M и N являются серединами двух отрезков AB и CD, не лежащих в одной плоскости. Доказать, что если при наложении $A \to B$, $B \to A$, $C \to D$, $D \to C$, то каждая из плоскостей ABN и CDM переходит в себя.

23. Точка A не лежит в плоскости треугольника BCD, причем $AB \geqslant AC$, $AB \geqslant AD$. Доказать, что для любой точки M, лежащей внутри треугольника BCD, $AM < AB$.

24. Доказать, что треугольники ABC и $A'B'C'$, расположенные в плоскостях α и α', равны, если выполняется хотя бы одно из условий:

а) $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ (второй признак равенства треугольников);

б) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ (третий признак равенства треугольников);

в) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $AC = A'C'$ (четвертый признак равенства треугольников).

25. Доказать, что прямоугольные треугольники ABC и $A'B'C'$ с прямыми углами C и C', расположенные в плоскостях α и α' равны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$; б) $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$; в) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$.

26. Доказать, что параллелограммы $ABCD$ и $A'B'C'D'$, расположенные в плоскостях α и α', равны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $AC = A'C'$; б) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $BD = B'D'$; в) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $\angle B = \angle B'$.

27. Четыре точки A, B, C и D в пространстве расположены так, что углы ACD и BCD — прямые. Доказать, что если M — произвольная точка прямой AB, отличная от точки C, то угол MCD — прямой.

Глава II

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§ 7. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

1. Аксиома параллельных прямых

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. Так же, как и в планиметрии, параллельность прямых a и b будет обозначаться так: $a \parallel b$.

Легко доказать, что *при наложении параллельные прямые переходят в параллельные прямые*. В самом деле, пусть $a \parallel b$, а a' и b' — образы прямых a и b при данном наложении f. Так как прямые a и b лежат в некоторой плоскости α, то прямые a' и b' лежат в плоскости $\alpha' = f(\alpha)$. Ясно, что прямые a' и b' не имеют ни одной общей точки, так как в противном случае прямые a и b имели бы общую точку, что невозможно.

В систему аксиом стереометрии, кроме аксиом групп I, II, III, IV, сформулированных в главе I, входит еще одна аксиома — аксиома параллельных прямых (группа V). Эта аксиома играет важную роль в геометрии.

V. В любой плоскости через точку, не лежащую на данной прямой этой плоскости, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Таким образом, в любой плоскости пространства выполняются все аксиомы евклидовой планиметрии (аксиомы групп I—V), поэтому выполняются также все теоремы планиметрии, доказанные в части 1. В частности, имеют место все признаки, а также все свойства параллельных прямых, лежащих в одной плоскости (см. [7] § 18 и § 19). Следует особо отметить, что в стереометрии справедлива теорема о сумме углов треугольника: *сумма углов любого треугольника равна 180°*.

В стереометрии так же, как и в планиметрии, используются понятия параллельности двух отрезков, отрезка и прямой, двух лучей и др. Например, два луча h и k называются параллельными, если прямые, на которых лежат лучи, параллельны.

Докажем теорему о параллельных прямых.

Теорема 1. *Через произвольную точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.*

□ Пусть a — данная прямая, а A — точка, не лежащая на данной прямой. По теореме 1 § 1 через точку A и прямую a проходит плоскость, которую обозначим через α. Согласно теореме 1 § 18 [7] в плоскости α через точку A проходит прямая, параллельная прямой a. Обозначим ее через b и докажем, что b — единственная прямая, которая проходит через точку A и параллельна прямой a. В самом деле, пусть c — какая-то прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой a. По определению параллельных прямых прямые a и c лежат в одной плоскости. Эта плоскость проходит через точку A и прямую a, поэтому она совпадает с плоскостью α. Но по аксиоме параллельных прямых в плоскости α через точку A проходит не более одной прямой, параллельной прямой a, следовательно, прямые b и c совпадают. ■

2. Теорема о трех параллельных прямых

Докажем сначала лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми. Эта лемма часто применяется при изучении свойств параллельности прямых и плоскостей.

Лемма. *Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.*

□ Пусть $a \parallel b$ и прямая a пересекает плоскость α в некоторой точке A. Докажем, что и прямая b пересекает плоскость α.

Рассмотрим плоскость β, в которой лежат параллельные прямые a и b. Плоскости α и β не совпадают, так как прямая a не лежит в плоскости α, но лежит в плоскости β. Эти плоскости имеют общую точку A, поэтому в силу аксиомы I_6 они пересекаются по некоторой прямой c (рис. 2). Прямая c лежит в плоскости β, в которой лежат параллельные прямые a и b, и пересекает прямую a, поэтому она пересекает прямую b

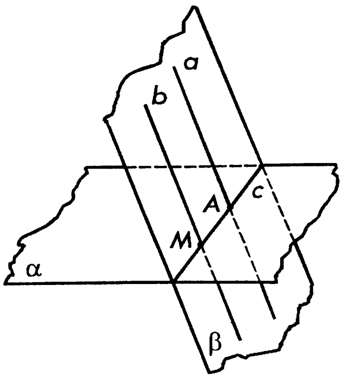


РИС. 2

в некоторой точке M. Точка M, очевидно, лежит в плоскости α.

Таким образом, прямая b и плоскость α имеют общую точку M. Но прямая b не лежит в плоскости α, так как если бы она лежала в этой плоскости, то по аксиоме I_6 она совпала бы с прямой c, что невозможно в силу того, что прямые b и c пересекаются. Следовательно, точка M является единственной общей точкой прямой b и плоскости α, т. е. прямая b пересекает плоскость α. ■

Докажем теперь теорему о трех параллельных прямых, которая является обобщением соответствующего утверждения из курса планиметрии (см. [7], § 18, свойство 2^0).

Теорема 2. *Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.*

□ Пусть каждая из двух данных прямых a и b параллельна прямой c. Докажем, что $a \parallel b$.

Докажем сначала, что прямые a и b лежат в одной плоскости. Для этого возьмем некоторую точку B прямой b и рассмотрим плоскость α, проходящую через прямую a и точку B. Нетрудно видеть, что прямая b лежит в плоскости α. В самом деле, если предположить, что она пересекает плоскость α, то по предыдущей лемме прямая c также пересекает плоскость α. Но тогда, по той же лемме, прямая a пересекает плоскость α, что невозможно, так как прямая a лежит в плоскости α.

Итак, прямые a и b лежат в плоскости α. Они не могут иметь общих точек, так как если предположить, что M — общая точка этих прямых, то через точку M проходили бы две прямые, параллельные прямой c, что противоречит теореме о параллельных прямых. Таким образом, прямые a и b параллельны. ■

3. Параллельность прямой и плоскости

Из аксиомы I_5 мы заключаем, что возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве: а) прямая лежит в плоскости; б) прямая пересекает плоскость, т. е. имеет с ней только одну общую точку; в) прямая и плоскость не имеют общих точек.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не имеют общих точек. Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$ или $\alpha \parallel a$.

Докажем теорему, выражающую признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема 3. *Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна самой плоскости.*

□ Пусть прямая a, не лежащая в плоскости α, параллельна прямой b, лежащей в этой плоскости. Докажем, что $a \parallel \alpha$. Допустим, что это не так, т. е. прямая a пересекает плоскость α. Но тогда по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также пересекает плоскость α. Это противоречит условию теоремы, следовательно, сделанное предположение неверно, т. е. $a \parallel \alpha$. ■

Рассмотрим некоторые свойства параллельности прямых и плоскостей.

1°. *Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, а другая прямая проходит через некоторую точку этой плоскости, то она лежит в данной плоскости.*

□ Пусть $a \parallel \alpha$, $AB \parallel a$ и A — точка плоскости α. Докажем, что прямая AB лежит в плоскости α.

Если предположить, что прямая AB пересекает плоскость α, то по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая a также должна пересекать плоскость α, что невозможно, так как она параллельна плоскости α. Таким образом, прямая AB не пересекает плоскость α, поэтому она лежит в этой плоскости. ■

2°. *Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна прямой, по которой эти плоскости пересекаются.*

□ Пусть прямая a параллельна каждой из плоскостей α и β, которые пересекаются по прямой AB. Докажем, что $a \parallel AB$. Для этого через точку A проведем прямую c, параллельную прямой a. По свойству 1^0 прямая c лежит как в плоскости α, так и в плоскости β, поэтому она совпадает с прямой AB. Итак, $a \parallel AB$. ■

3^0. *Если в одной из двух пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то эта прямая параллельна линии пересечения данных плоскостей.*

□ Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a, а прямая b, лежащая в плоскости β, параллельна плоскости α. Докажем, что $a \parallel b$.

Так как $b \parallel \alpha$, а $a \subset \alpha$, то прямые a и b не могут иметь общих точек. Эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости β), поэтому они параллельны. ■

§ 8. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

1. Параллельные плоскости

Из аксиомы I_6 непосредственно следует, что две плоскости либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются. Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$.

Докажем теорему, выражающую признак параллельности двух плоскостей.

Теорема 1. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

□ Пусть две прямые a и b плоскости α, пересекающиеся в точке A, соответственно параллельны прямым a_1 и b_1 плоскости β. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$.

Предположим, что это не так, т. е. плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой c (рис. 3). Так как $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, то по признаку параллельности прямой и плоскости имеем: $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$. По свойству 3^0 § 7 $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Мы пришли к противоречию с теоремой о параллельных прямых: через точку A

проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Следовательно, наше предположение неверно, т. е. $\alpha \parallel \beta$. ■

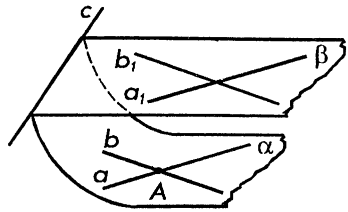


РИС. 3

Следствие. *Если каждая из двух пересекающихся прямых одной плоскости параллельна другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

□ Пусть каждая из двух пересекающихся прямых a и b плоскости α параллельна плоскости β. Через произвольную точку A_1 плоскости β проведем прямые a_1 и b_1, соответственно параллельные прямым a и b. По свойству 1^0 § 7 прямые a_1 и b_1 лежат в плоскости β, поэтому по предыдущей теореме $\alpha \parallel \beta$. ■

2. Свойства параллельных плоскостей

1^0. *Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.*

□ Пусть плоскости α и β параллельны и прямая a пересекает плоскость α. Докажем, что прямая a пересекает и плоскость β.

Через некоторую точку B плоскости β проводим прямую b, параллельную прямой a. По лемме о пересечении плоскости двумя параллельными прямыми прямая b пересекает плоскость α. Отсюда следует, что прямая b не лежит в плоскости β, т. е. пересекает эту плоскость. Тогда, по той же лемме, прямая a пересекает плоскость β. ■

2^0. *Если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.*

□ Пусть плоскости α и β параллельны, и плоскость γ пересекает плоскость α по некоторой прямой a. Докажем, что плоскость γ пересекает также плоскость β (рис. 4).

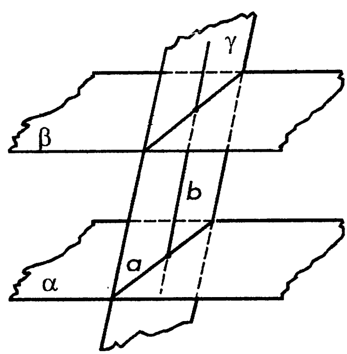


РИС. 4

Проведем в плоскости γ прямую b, пересекающую прямую a. Прямая b пересекает плоскость α, поэтому по предыдущему свойству она пересекает и параллельную ей плоскость β. Следовательно, плоскости γ и β имеют общую точку, т. е. они пересекаются. ■

Предлагаем читателю, используя определение параллельных прямых, самостоятельно доказать следующее свойство.

3°. *Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые, по которым они пересекаются, параллельны.*

4°. *Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.*

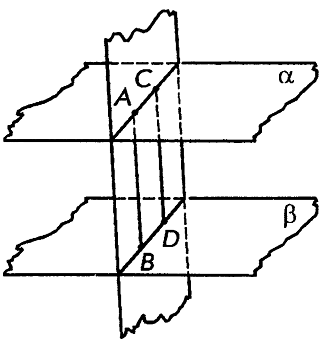


РИС. 5

□ Пусть AB и CD — отрезки двух параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями α и β. Докажем, что $AB = CD$ (рис. 5).

Плоскость γ, проходящая через параллельные прямые AB и CD, пересекает плоскости α и β по прямым AC и BD. По свойству 3° $AC \parallel BD$. Таким образом, четырехугольник $ABDC$, лежащий в плоскости γ, является параллелограммом, поэтому $AB = CD$. ■

5°. *Если две плоскости параллельны третьей плоскости, то они параллельны.*

□ Пусть две плоскости α и β параллельны плоскости γ. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Допустим, что плоскости α и β не параллельны, т. е. пересекаются. По свойству 2° плоскость α, пересекающая плоскость β, пересекает также параллельную ей плоскость γ, что невозможно, так как $\beta \parallel \gamma$. Таким образом, наше допущение неверно, т. е. $\alpha \parallel \beta$. ■

3. Теорема о параллельных плоскостях

Докажем теорему, аналогичную теореме о параллельных прямых.

Теорема 2. *Через любую точку пространства, не* *лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной плоскости, и притом только одна.*

□ Пусть α — данная плоскость, а A — точка, не лежащая в ней. Докажем сначала, что через данную точку A проходит плоскость, параллельная плоскости α. Для этого рассмотрим какие-нибудь две пересекающиеся прямые a и b плоскости α и, пользуясь теоремой о параллельных прямых, через точку A проведем прямые a_1 и b_1, параллельные соответственно прямым a и b. Рассмотрим плоскость β, проходящую через эти прямые. По теореме 1 $\beta \parallel \alpha$.

Докажем теперь, что β — единственная плоскость, которая проходит через точку A и параллельна плоскости α. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через точку A, пересекает плоскость β, поэтому согласно свойству 2^0 она пересекает и параллельную ей плоскость α. ■

§ 9. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Скрещивающиеся прямые

Если две прямые пересекаются или параллельны, то они лежат в одной плоскости. Но в пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т. е. не существует такой плоскости, которая бы проходила через эти прямые.

Например, если возьмем четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости (аксиома I_7), то прямые AB и CD не лежат в одной плоскости.

Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Докажем теорему, которая выражает признак скрещивающихся прямых.

Теорема 1. *Если прямая a лежит в некоторой плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b — скрещивающиеся прямые.*

□ Обозначим через B точку пересечения прямой b с плоскостью α (рис. 6). Докажем, что прямые a и b не лежат в одной плоскости.

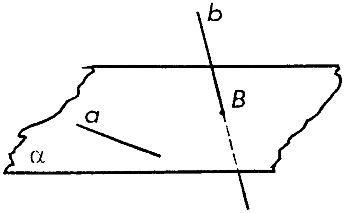


РИС. 6

Допустим, что это не так, т. е. прямые a и b лежат в некоторой плоскости β. Плоскость β проходит через точку B и прямую a, поэтому по теореме 1 § 1 она совпадает с плоскостью α. Отсюда следует, что прямая b лежит в плоскости α, что противоречит условию теоремы. Таким образом, a и b — скрещивающиеся прямые. ■

Докажем теорему о плоскостях, содержащих скрещивающиеся прямые.

Теорема 2. *Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит одна и только одна плоскость, параллельная другой плоскости, при этом эти две плоскости параллельны.*

□ Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые. докажем сначала, что через прямую a проходит плоскость, параллельная прямой b. Для этого через произвольную точку M прямой a проведем прямую b', параллельную прямой b. Так как прямые a и b не параллельны, то прямая b' не совпадает с прямой a. По теореме 3 § 7 плоскость α, проходящая через прямые a и b', параллельна прямой b.

Любая плоскость α', проходящая через прямую a и не совпадающая с α, пересекает прямую b', поэтому, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми, плоскость α' пересекает также прямую b. Таким образом, α — единственная плоскость, проходящая через прямую a и параллельная прямой b.

Аналогично доказывается, что через прямую b проходит одна и только одна плоскость β, параллельная прямой a.

По теореме 3 § 7 $b' \parallel \beta$. Таким образом, в плоскости α лежат две пересекающиеся прямые a и b', каждая из которых параллельна плоскости β. По следствию теоремы 1 § 8 плоскости α и β параллельны. ■

2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Из теоремы 1 § 7 следует, что в пространстве существует бесконечное множество пар параллельных прямых. Далее, из теоремы 1 мы заключаем, что в пространстве существует бесконечное множество пар скрещивающихся прямых.

Итак, возможны следующие три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве: а) прямые пересекаются, т. е. имеют только одну общую точку; б) прямые параллельны, т. е. лежат в одной плоскости и не имеют общих точек; в) прямые являются скрещивающимися, т. е. не лежат в одной плоскости.

3. Взаимное расположение двух и трех плоскостей

Из теоремы 2 § 8 следует, что существует бесконечное множество пар параллельных плоскостей. Таким образом, возможны два случая взаимного расположения двух плоскостей в пространстве: а) плоскости пересекаются по прямой; б) плоскости параллельны.

Рассмотрим теперь различные случаи взаимного расположения трех попарно различных плоскостей в пространстве. Возможны следующие случаи в зависимости от взаимного расположения каждой пары плоскостей.

а) Данные плоскости попарно пересекаются, и все три плоскости имеют по крайней мере две общие точки P и Q. В этом случае, очевидно, все три плоскости проходят через прямую PQ (рис. 7а).

б) Данные плоскости попарно пересекаются, и все три плоскости имеют только одну общую точку P. Ясно, что все три прямые, по которым данные плоскости попарно пересекаются, проходят через точку P и не лежат в одной плоскости (рис. 7б).

в) Данные плоскости попарно пересекаются и не имеют ни одной общей точки. Читатель легко убедится в том, что в этом случае три прямые, по которым данные плоскости попарно пересекаются, не лежат в одной плоскости и попарно параллельны (рис. 7в).

г) Две из данных трех плоскостей параллельны, а третья плоскость пересекает одну из них. По свойству 2° § 8 эта плоскость пересекает также вторую плоскость (рис. 7г).

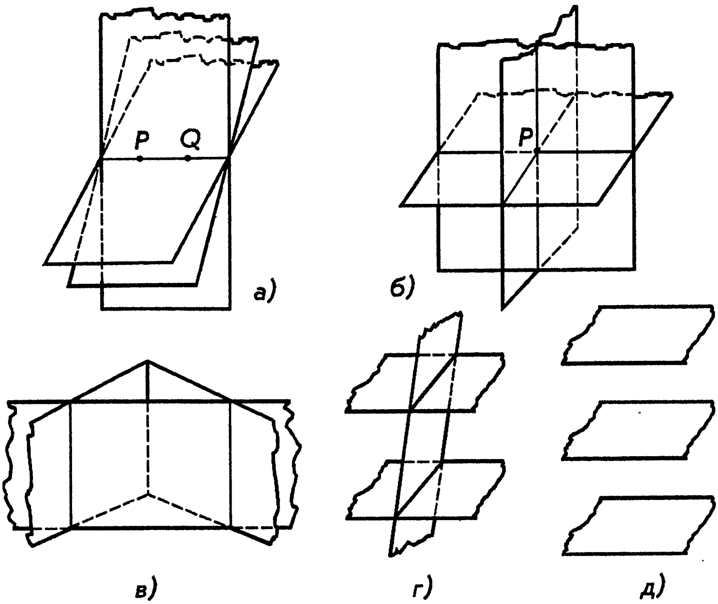


РИС. 7

д) Две из данных трех плоскостей параллельны, а третья параллельна одной из них. По свойству 5° § 8 эта плоскость параллельна также второй плоскости, т. е. все три плоскости попарно параллельны (рис. 7д).

Таким образом, возможны следующие пять случаев взаимного расположения трех плоскостей в пространстве: а) три плоскости проходят через одну прямую (см. рис. 7а); б) три плоскости имеют одну и только одну общую точку (см. рис. 7б); в) три плоскости попарно пересекаются по прямым, которые попарно параллельны и не лежат в одной плоскости (см. рис. 7в); г) две плоскости параллельны, а третья плоскость пересекает их по параллельным прямым (см. рис. 7г); д) три плоскости попарно параллельны (см. рис. 7д).

4. Пучки пересекающихся и параллельных прямых

При решении задач на взаимное расположение прямых и плоскостей, в частности, на параллельность прямых и плоскостей, используются так называемые пучки пересекающихся и параллельных прямых. Введем эти понятия и рассмотрим две основные задачи о задании пучков.

Рассмотрим плоскость α и произвольную точку A этой плоскости. Множество всех прямых плоскости α, каждая из которых проходит через точку A, называется *пучком пересекающихся прямых*. Точка A называется *центром пучка*, а плоскость α — *плоскостью пучка*.

З а д а ч а 1. Доказать, что множество всех прямых пространства, каждая из которых проходит через данную точку A и параллельна данной плоскости α, не проходящей через точку A, есть пучок пересекающихся прямых с центром A. Плоскость этого пучка проходит через точку A и параллельна плоскости α.

□ Обозначим через Ω множество всех прямых, удовлетворяющих условиям задачи. Согласно теореме 2 § 8 существует единственная плоскость β, проходящая через точку A и параллельная плоскости α.

Пусть l — произвольная прямая множества Ω. Прямая l лежит в плоскости β, так как в противном случае по свойству 1^0 § 8 она пересекала бы плоскость α, что невозможно. Следовательно, прямая l принадлежит пучку пересекающихся прямых с центром A и плоскостью β. Обратно, любая прямая m этого пучка проходит через точку A и параллельна плоскости α, так как $\beta \parallel \alpha$, поэтому $m \in \Omega$. Итак, множество Ω совпадает с пучком пересекающихся прямых с центром A и плоскостью β. ■

Таким образом, пучок пересекающихся прямых может быть задан либо центром и плоскостью пучка, либо центром и любой плоскостью, параллельной плоскости пучка.

Рассмотрим теперь плоскость α и произвольную прямую a этой плоскости. Множество прямых, состоящее из прямой a, и всех прямых плоскости α, каждая из которых параллельна прямой a, называется *пучком параллельных прямых*. Плоскость α называется *плоскостью этого пучка*.

З а д а ч а 2. Даны плоскость α и параллельная ей прямая a. Доказать, что множество всех прямых пространства, каждая из которых параллельна прямой a

и имеет хотя бы одну общую точку с плоскостью α, есть пучок параллельных прямых. Плоскость α является плоскостью этого пучка.

□ Через произвольную точку M плоскости α проведем прямую b, параллельную прямой a. По свойству 1^0 § 7 прямая b лежит в плоскости α. Пусть Ω множество всех прямых, удовлетворяющих условиям задачи, а Ω' — пучок параллельных прямых, заданный плоскостью α и прямой b. Докажем, что множества Ω и Ω' совпадают.

Если $l \subset \Omega$, то $l \parallel a$ и l имеет общую точку с плоскостью α, поэтому по свойству 1^0 § 7 прямая l лежит в плоскости α. Докажем, что $l \subset \Omega'$. В случае, когда прямые l и b совпадают, это утверждение очевидно, а в общем случае, когда l и b — различные прямые, по теореме 2 § 7 $l \parallel b$, поэтому $l \subset \Omega'$.

Обратно, любая прямая m множества Ω' лежит в плоскости α и либо совпадает с прямой b, либо параллельна ей. В любом из этих случаев, учитывая теорему 2 § 7, мы заключаем, что $m \parallel a$. Следовательно, $m \subset \Omega$. ■

Таким образом, пучок параллельных прямых может быть задан либо плоскостью пучка и произвольной прямой пучка, либо плоскостью пучка и прямой пространства, не лежащей в плоскости пучка и параллельной какой-нибудь прямой пучка.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

28. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Медианы треугольников ABC и CBD пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2. Доказать, что прямые AD и M_1M_2 параллельны.

29. Даны два параллелограмма ABB_1A_1 и ACC_1A_1. Доказать, что прямые BC и B_1C_1 параллельны или совпадают.

30. Точки A, B, C и D являются серединами сторон MN, NP, PQ и QM пространственного четырехугольника $MNPQ$. Доказать, что: а) $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$; б) прямые AC и BD пересекаются.

31. Доказать, что следующее предложение эквивалентно аксиоме параллельных прямых: существует хотя бы одна плоскость, в которой через точку, не лежащую на данной прямой в этой плоскости, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

32. Прямая a лежит в плоскости α. Прямая b параллельна прямой a и имеет общую точку с плоскостью α. Доказать, что прямая b лежит в плоскости α.

33. Прямая a параллельна плоскости α. Доказать, что если $b \parallel a$, то прямая b либо параллельна плоскости α, либо лежит в ней.

34. Доказать, что а) если прямая a параллельна плоскости α, то через любую точку плоскости α проходит прямая, лежащая в этой плоскости и параллельная прямой a; б) если прямая a пересекает плоскость α, то не существует прямой, лежащей в плоскости α и параллельной прямой a.

35. Через каждую из двух параллельных прямых a и b и точку M, не лежащую в плоскости этих прямых, проведена плоскость. Доказать, что эти плоскости пересекаются по прямой, параллельной прямым a и b.

36. Доказать, что плоскость, пересекающая прямую, пересекает любую плоскость, параллельную этой прямой.

37. Доказать, что при наложении: а) параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости; б) плоскость и параллельная ей прямая переходит в плоскость и параллельную ей прямую.

38. Плоскости α_1 и β_1 пересекаются по прямой a, а плоскости α_2 и β_2 — по прямой b. Доказать, что если $\alpha_1 \parallel \alpha_2$, и $\beta_1 \parallel \beta_2$, то прямые a и b параллельны.

39. Даны две параллельные плоскости и прямая, параллельная одной из них. Доказать, что эта прямая либо параллельна другой плоскости, либо лежит в ней.

40. Две смежные стороны многоугольника параллельны плоскости α. Доказать, что все стороны многоугольника параллельны плоскости α.

41. Прямая a параллельна плоскости α. Доказать, что существует плоскость, проходящая через прямую a и параллельная плоскости α, притом только одна.

42. Доказать, что если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то прямые, по которым они пересекаются, параллельны.

43. Две прямые a и b пересекают три попарно параллельные плоскости соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Найти отрезки A_1A_3 и B_1B_3, если $A_1A_2 = 4$ см, $B_2B_3 = 9$ см, $A_2A_3 = B_1B_2$.

44. Две прямые пересекают данные k попарно параллельные плоскости (где $k > 2$) соответственно в точках A_1, A_2 ... , A_k и B_1, B_2, ... , B_k. Доказать, что

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots = \frac{A_{k-1}A_k}{B_{k-1}B_k}.$$

45. Даны пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая в плоскости этих прямых. Доказать, что через точку A проходит плоскость, параллельная прямым a и b, и притом только одна.

46. Доказать, что прямые AB и CD являются скрещивающимися тогда и только тогда, когда прямые AC и BD являются скрещивающимися прямыми.

47. Прямые a и b лежат соответственно в плоскостях α и β, которые пересекаются по прямой p. Прямая p пересекает прямую a в точке A, а прямую b — в точке B. Доказать, что прямые a и b являются скрещивающимися прямыми тогда и только тогда, когда точки A и B не совпадают.

48. Прямая m пересекает сторону AB треугольника ABC. Выяснить взаимное расположение прямых m и BC, если а) прямая m лежит в плоскости ABC и не имеет общих точек с отрезком AC; б) прямая m не лежит в плоскости ABC.

49. Доказать, что две прямые параллельны тогда и только тогда, когда любая плоскость, пересекающая одну из этих прямых, пересекает и другую прямую.

50. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Доказать, что существует не более одной прямой, проходящей через точку A и пересекающей данные прямые. При каком расположении прямых a и b и точки A такая прямая существует?

51. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и прямая c. Доказать, что существует не более одной прямой, параллельной прямой c и пересекающей прямые a и b. При каком расположении прямых a, b и c такая прямая существует?

52. Даны две скрещивающиеся прямые и точка A. Доказать, что через точку A проходит одна и только одна плоскость, которая либо параллельна данным прямым, либо проходит через одну из них и параллельна другой.

53. Три плоскости попарно пересекаются и не имеют ни одной общей точки. Доказать, что три прямые, по которым данные плоскости попарно пересекаются, не лежат в одной плоскости и попарно параллельны.

54. Три плоскости попарно пересекаются по прямым, из которых, по крайней мере, две прямые пересекаются. Доказать, что прямые, по которым плоскости пересекаются, не лежат в одной плоскости и проходят через одну точку.

55. Даны три попарно параллельные плоскости и плоскость α, которая пересекает одну из них. Доказать, что плоскость α пересекает две другие плоскости.

56. Плоскости α и β пересекаются. Доказать, что любая плоскость пересекает хотя бы одну из них.

57. В пространстве даны пять точек A, B, C, D и E, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости. Пусть P и P' — середины отрезков AE и CD, а Q и Q' — точки пересечения медиан треугольников BCD и ABE. Доказать, что точки P, Q', Q и P' являются вершинами трапеции и найти отношение ее оснований.

ПУЧКИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

58. Прямая a пересекает плоскость α, точка A не лежит ни на прямой a, ни в плоскости α. Доказать, что существует прямая, проходящая через точку A, параллельная плоскости α и пересекающая прямую a, и притом только одна.

59. Даны пучок пересекающихся прямых с центром A и плоскостью α и прямая l, параллельная плоскости α. Доказать, что прямая l и каждая из прямых данного пучка, за исключением одной прямой, являются скрещивающимися прямыми.

60. Через точку M, не лежащую на прямой a, проведены две прямые, не имеющие общих точек с прямой a. Доказать, что, по крайней мере, одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися прямыми.

61. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Доказать, что множество всех прямых, каждая из которых пересекает прямую a и параллельна прямой b, образует пучок параллельных прямых, плоскость которого проходит через прямую a и параллельна b.

Глава III

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§ 10. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ

1. Углы с сонаправленными лучами

Два луча OA и O_1A_1, не лежащие на одной прямой, называются сонаправленными (одинаково направленными), если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей OO_1 (рис. 8а). Лучи OA и O_1A_1, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если они совпадают или один из них содержит другой (рис. 8б). Сонаправленность лучей OA и O_1A_1 будем обозначать так: $OA \uparrow\uparrow O_1A_1$. Если лучи лежат на параллельных прямых или на одной прямой, но не сонаправлены, то они называются *противоположно направленными*.

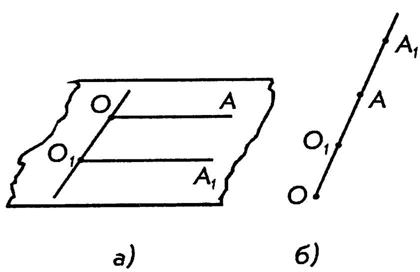


РИС. 8

Нетрудно доказать, что если $O_1A_1 \uparrow\uparrow O_2A_2$, $O_2A_2 \uparrow\uparrow O_3A_3$, то $O_1A_1 \uparrow\uparrow O_3A_3$.

Докажем теорему об углах с сонаправленными сторонами.

Теорема 1. *Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.*

□ Пусть стороны углов AOB и $A_1O_1B_1$ соответственно сонаправлены: $OA \upuparrows O_1A_1$, $OB \upuparrows O_1B_1$. Докажем, что $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Если угол AOB развернутый, то и угол $A_1O_1B_1$ развернутый, поэтому $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Докажем теорему, предполагая, что угол AOB неразвернутый, тогда и угол $A_1O_1B_1$ — неразвернутый.

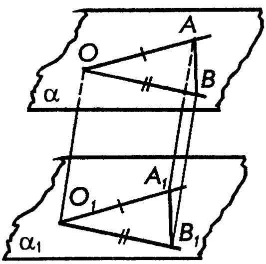


РИС. 9

Рассмотрим сначала случай, когда плоскости α и α_1 углов AOB и $A_1O_1B_1$ не совпадают (рис. 9). В этом случае, очевидно, $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$, поэтому по теореме 1 § 8 $\alpha \parallel \alpha_1$. Не нарушая общности, можно считать, что точки A, B, A_1, B_1 на сторонах данных углов выбраны так, что $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$.

Четырехугольник OO_1A_1A является параллелограммом, так как $OA \parallel O_1A_1$ и $OA = O_1A_1$, поэтому $OO_1 \parallel AA_1$. Аналогично, $OO_1 \parallel BB_1$. Из соотношений $OO_1 \parallel AA_1$ и $OO_1 \parallel BB_1$ по теореме о трех параллельных прямых получаем: $AA_1 \parallel BB_1$. Отсюда, по свойству 4^0 § 8, имеем: $AA_1 = BB_1$, т. е. в четырехугольнике ABB_1A_1 противоположные стороны параллельны и равны, поэтому ABB_1A_1 — параллелограмм. Следовательно, $AB = A_1B_1$. Таким образом, $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$, $AB = A_1B_1$, поэтому $\Delta\, OAB = \Delta\, O_1A_1B_1$ по трем сторонам. Следовательно, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Рассмотрим теперь случай, когда плоскости данных углов совпадают. Возьмем в пространстве точку O_2, не лежащую в плоскости данных углов, и проведем лучи O_2A_2 и O_2B_2, сонаправленные соответственно с лучами OA и OB. Ясно, что $O_2A_2 \upuparrows O_1A_1$, $O_2B_2 \upuparrows O_1B_1$. По доказанному, $\angle A_2O_2B_2 = \angle AOB$ и $\angle A_2O_2B_2 = \angle A_1O_1B_1$, поэтому $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. ■

2. Угол между двумя прямыми

Две пересекающиеся прямые a и b образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то, используя свойства смежных и вертикальных углов, легко найти все остальные углы. *Углом между пересекающимися прямыми* a и b называется мера того из этих четырех углов, которая не превосходит меры каждого из трех остальных углов. Отсюда следует, что если φ — угол между прямыми a и b, то $0^\circ < \varphi \leqslant 90^\circ$.

Используя теорему об углах с сонаправленными сторонами, легко доказать следующую лемму:

Лемма 1. *Если пересекающиеся прямые a и b соответственно параллельны пересекающимся прямым a' и b', то угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a' и b'.*

Введем теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Пусть a и b — две скрещивающиеся прямые. Через произвольную точку M_1 пространства проведем прямые a_1 и b_1, соответственно параллельные прямым a и b (если точка M_1 лежит на одной из этих прямых, например, $M_1 \in a$, то за a_1 примем прямую a). *Углом между скрещивающимися прямыми a и b называется угол между прямыми a_1 и b_1.* Угол между прямыми a и b будем обозначать так: $\widehat{ab}$.

Предлагаем читателю, используя предыдущую лемму, самостоятельно доказать, что введенное нами понятие не зависит от выбора точки M_1.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если прямые a и b не параллельны, то их образы a' и b' при данном наложении также не параллельны и $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$.*

□ Рассмотрим сначала случай, когда прямые a и b пересекаются в некоторой точке O. Отметим на прямых a и b соответственно точки A и B, отличные от точки O так, чтобы $\widehat{AOB} = \widehat{ab}$. Если O', A' и B' — образы точек O, A и B, то ясно, что точки O' и A' лежат на прямой a', а O' и B' — на прямой b'. По свойству 2^0 § 3 точки O', A' и B' не лежат на одной прямой, т. е. a' и b' пересекающиеся прямые. Треугольники OAB и $O'A'B'$ равны по трем сторонам, поэтому $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$. Но $\widehat{AOB} = \widehat{ab}$, $\widehat{A'O'B'} = \widehat{a'b'}$ (в чем читатель легко убедится самостоятельно), следовательно, $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$.

Рассмотрим теперь случай, когда a и b — скрещивающиеся прямые. Эти прямые не лежат в одной плоскости, поэтому и их образы a' и b' не лежат в одной плоскости, т. е. a' и b' являются скрещивающимися прямыми. Через некоторую точку прямой a проведем прямую c, параллельную прямой b, и обозначим через c' образ этой прямой при данном наложении. Так как $b \parallel c$, то $b' \parallel c'$ (см. § 7 п. 1). По условию a и b скрещивающиеся прямые, поэтому a и c пересекающиеся прямые и по доказанному a' и c' также пересекающиеся прямые и $\widehat{ac} = \widehat{a'c'}$. По определению $\widehat{ab} = \widehat{ac}$ и $\widehat{a'b'} = \widehat{a'c'}$, следовательно, $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$. ■

3. Перпендикулярность прямых в пространстве

Две пересекающиеся или скрещивающиеся прямые называются *перпендикулярными* (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°.

Ясно, что понятие перпендикулярности в пространстве для двух пересекающихся прямых совпадает с этим понятием на плоскости, в которой они лежат. Из теоремы 2 непосредственно следует, что *при наложении перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые.*

Докажем лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей.

Лемма 2. *Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.*

□ Пусть $a \parallel b$ и $a \perp c$. Докажем, что $b \perp c$. Через какую-нибудь точку M прямой c, не принадлежащую прямым a и b, проведем прямую a_1, параллельную прямой a (рис. 10). Так как $a \perp c$, то в плоскости, проходящей через прямые a_1 и c, прямые a_1 и c перпендикулярны. По теореме о трех параллельных прямых $b \parallel a_1$, поэтому $b \perp c$. ■

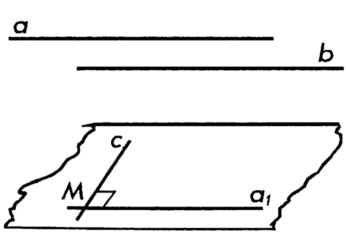


Рис. 10

§ 11. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

1. Свойства перпендикулярных прямых и плоскостей

Прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости. Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$. Говорят также, что плоскость α перпендикулярна к прямой a. При наложении прямая переходит в прямую, перпендикулярные прямые — в перпендикулярные прямые, а плоскость в плоскость. Поэтому *при наложении прямая и перпендикулярная к ней плоскость переходят в прямую и перпендикулярную к ней плоскость.*

Докажем, что *если прямая a перпендикулярна к плоскости, то она пересекает эту плоскость.* Для этого через какую-нибудь точку M плоскости α проведем прямую a_1, параллельную прямой a. Так как $a \perp \alpha$, то прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α. По лемме 2 § 10 и прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α. Отсюда следует, что прямая a_1 не лежит в плоскости α, поэтому пересекает эту плоскость (так как в противном случае прямая a_1 не может быть перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α). По лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая a, параллельная прямой a_1, также пересекает плоскость α.

Рассмотрим некоторые свойства перпендикулярности прямых и плоскостей.

1°. *Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна к данной прямой, то и вторая плоскость перпендикулярна к этой прямой.*

□ Пусть $\alpha \parallel \beta$ и $\alpha \perp a$. Докажем, что $\beta \perp a$, т. е. что произвольная прямая x плоскости β перпендикулярна к прямой a. Через какую-нибудь точку плоскости α проведем прямую y, параллельную прямой x. Так как $x \parallel \alpha$, то по свойству 1° § 7 прямая y лежит в плоскости α, поэтому из условия $\alpha \perp a$ следует, что $a \perp y$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a \perp x$. ■

2^0. *Если две плоскости перпендикулярны к данной прямой, то они параллельны.*

□ Пусть $\alpha \perp p$ и $\beta \perp p$. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Проведем через прямую p две произвольные плоскости γ_1 и γ_2 и обозначим через a_1 и b_1 прямые, по которым эти плоскости пересекают плоскость α, а через a_2, b_2 — плоскость β (рис. 11). Так как $p \perp \alpha$, то $p \perp a_1$ и $p \perp b_1$. Аналогично $p \perp a_2$ и $p \perp b_2$. Прямые p, a_1 и a_2 лежат в плоскости γ_1, а прямые p, b_1 и b_2 — в плоскости γ_2, поэтому $a_1 \parallel a_2$ и $b_1 \parallel b_2$. По теореме 1 § 8 $\alpha \parallel \beta$. ■

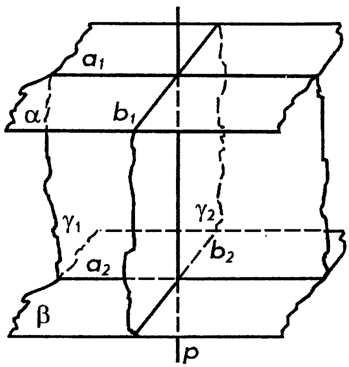


РИС. 11

3^0. *Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна к этой плоскости.*

□ Пусть $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$. Докажем, что $b \perp \alpha$. Рассмотрим произвольную прямую x плоскости α. Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей из соотношений $a \parallel b$ и $a \perp x$ следует, что $b \perp x$. Но x — произвольная прямая плоскости α, поэтому $b \perp \alpha$. ■

4^0. *Если две прямые перпендикулярны к некоторой плоскости, то они параллельны.*

□ Пусть $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$. Докажем, что $a \parallel b$. Возьмем некоторую точку M прямой b, не лежащую в плоскости α, и проведем прямую MN, параллельную прямой a. По свойству 3^0 $MN \perp \alpha$. Прямые MN и b совпадают, так как в противном случае в плоскости β, проходящей через прямые MN и b, через точку M проходили бы две прямые MN и b, перпендикулярные к прямой p, по которой пересекаются плоскости α и β. Этот вывод противоречит теореме 3 § 4. Итак, прямые MN и b совпадают, т. е. $a \parallel b$. ■

2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Докажем теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 1. *Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.*

□ Пусть прямая a перпендикулярна к каждой из двух прямых b и c, лежащих в плоскости α и пересекающихся в точке O. Докажем, что прямая a перпендикулярна к плоскости α. Для этого нужно доказать, что прямая a перпендикулярна к любой прямой x, лежащей в плоскости α.

Сначала докажем теорему в предположении, что прямая a проходит через точку O. Проведем через точку O прямую x_1, параллельную прямой x (если прямая x проходит через точку O, то за прямую x_1 примем прямую x), и докажем, что $a \perp x_1$. Это утверждение очевидно, если x_1 совпадает с одной из прямых a или b, поэтому рассмотрим случай, когда b, c и x_1 — попарно различные прямые.

На прямой a возьмем две точки A и A' так, чтобы точка O была серединой отрезка AA' (рис. 12). В плоскости α проведем прямую l, пересекающую прямые b, c, x_1 в трех точках B, C, X. Пусть для определенности точка X лежит на луче BC. Так как в треугольниках ABA' и ACA' отрезки BO и CO являются одновременно медианами и высотами, то эти треугольники — равнобедренные, т. е. $AB = A'B$ и $AC = A'C$.

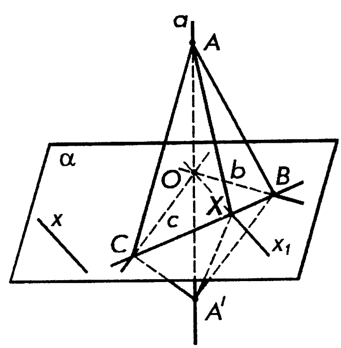


Рис. 12

Треугольники ABC и $A'BC$ равны по трем сторонам, следовательно, $\angle ABC = \angle A'BC$.

Рассмотрим треугольники ABX и $A'BX$, которые равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AX = A'X$, т. е. треугольник AXA' — равнобедренный. В этом треугольнике XO является медианой, а значит, и высотой, т. е. $a \perp x_1$. Отсюда по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей следует, что $a \perp x$, и поэтому $a \perp \alpha$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую a_1, параллельную прямой a. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp b$, $a_1 \perp c$, поэтому по доказанному $a_1 \perp \alpha$. По свойству 3^0 $a \perp \alpha$. ■

3. Теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости

Теорема 2. *Через данную точку пространства проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к данной прямой.*

□ Докажем сначала, что существует плоскость, проходящая через данную точку M и перпендикулярная к данной прямой a.

Через прямую a проведем две плоскости α и β так, чтобы точка M лежала в плоскости α (рис. 13). В плоскости α через точку M проведем прямую MO,

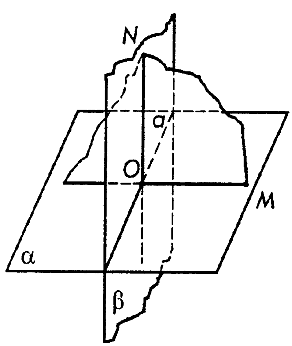


РИС. 13

перпендикулярную к прямой a, $O \in a$, а через точку O в плоскости β проведем прямую ON, также перпендикулярную к прямой a. По предыдущей теореме плоскость OMN перпендикулярна к прямой a.

По свойству 2^0 любые две плоскости, перпендикулярные к прямой a, параллельны, поэтому через точку M проходит единственная плоскость (плоскость OMN), перпендикулярная к прямой a. ■

Теорема 3. *Через любую точку пространства проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная к данной плоскости.*

□ Докажем сначала, что существует прямая a, проходящая через данную точку M и перпендикулярная к данной плоскости α.

Рассмотрим какие-нибудь две пересекающиеся прямые b_1 и b_2, лежащие в плоскости α. По теореме 2 через точку M проходят плоскости β_1 и β_2, перпендикулярные соответственно к прямым b_1 и b_2. Плоскости β_1 и β_2 имеют общую точку M, поэтому они имеют общую прямую a, проходящую через точку M. Очевидно, $a \perp b_1$ и $a \perp b_2$, поэтому по теореме 1 $a \perp \alpha$.

По свойству 4^0 любые две прямые, перпендикулярные к плоскости α, параллельны, поэтому через точку M проходит единственная прямая (прямая a), перпендикулярная к плоскости α. ■

4. Множества точек, равноудаленных от двух и трех точек

Рассмотрим две задачи, которые часто используются при доказательстве утверждений и решении задач о взаимном расположении прямых и плоскостей.

Докажем сначала следующую лемму о пучке прямых, перпендикулярных к данной прямой.

Лемма. *Множество всех прямых, каждая из которых проходит через данную точку A и перпендикулярна к данной прямой a, проходящей через точку A, есть пучок пересекающихся прямых с центром A, плоскость которого проходит через точку A и перпендикулярна к прямой a.*

□ Рассмотрим плоскость α, проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой a, и докажем, что пучок Ω с центром A и плоскостью α является данным множеством прямых.

Если прямая l принадлежит пучку Ω, то $l \subset \alpha$, поэтому $l \perp a$, следовательно, прямая l принадлежит данному множеству прямых. Обратно, пусть m — произвольная прямая данного множества прямых. Обозначим через β плоскость, проходящую через a и m, а через b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. Прямые m и b лежат в плоскости β, проходят через точку A и перпендикулярны к прямой a, поэтому они совпадают. Но $A \in b$, $b \subset \alpha$, поэтому $b \in \Omega$, следовательно, $m \in \Omega$. ■

Отметим, что лемма верна и в том случае, когда точка A не лежит на прямой a. Предлагаем читателю самостоятельно доказать это утверждение.

Задача 1. Доказать, что фигура, состоящая из множества всех точек пространства, каждая из которых равноудалена от концов отрезка AB, есть плоскость, перпендикулярная к прямой AB и проходящая через середину отрезка AB.

□ Проведем через середину O отрезка AB плоскость α, перпендикулярную к прямой AB, и докажем, что данное в задаче множество Ω точек состоит из всех точек плоскости α.

Пусть M — произвольная точка множества Ω, а β — плоскость, проходящая через точки A, B и M. Так как $AM = MB$, то по теореме 3 § 17 [7] в плоскости β точка M лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку AB. По предыдущей лемме $l \subset \alpha$, поэтому $M \in \alpha$.

Обратно, пусть M — произвольная точка плоскости α, а β — плоскость, проходящая через точки A, B и M. Так как $M \subset \alpha$ и $\alpha \perp AB$, то $OM \perp AB$ (если точки O и M совпадают, то OM — произвольная прямая плоскости β). По теореме 3 § 17 [7] в плоскости β точка M лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку AB, следовательно, $AM = MB$. Таким образом, $M \in \Omega$. ■

Задача 2. Доказать, что фигура, состоящая из множества всех точек пространства, каждая из которых равноудалена от вершин треугольника ABC, есть прямая, проходящая через центр O описанной около треугольника ABC окружности и перпендикулярная к плоскости этого треугольника.

□ Обозначим через α плоскость, проходящую через середину отрезка BC и перпендикулярную к пря-

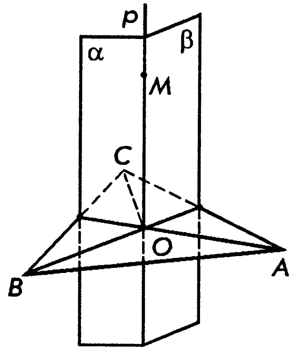


РИС. 14

мой BC, а через β другую плоскость, проходящую через середину отрезка AC и перпендикулярную к прямой AC. Точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности, поэтому $AO = BO = CO$. По задаче 1 $O \in \alpha$ и $O \in \beta$, т. е. плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой p, проходящей через точку O (рис. 14). Так как $p \subset \alpha$, а $\alpha \perp BC$, то $p \perp BC$. Аналогично, $p \perp AC$. По теореме 1 прямая p перпендикулярна к плоскости ABC.

Докажем, что данное в задаче множество Ω точек состоит из всех точек прямой p. Пусть M — произвольная точка множества Ω. Тогда $MB = MC = MA$. По задаче 1 $M \in \alpha$ и $M \in \beta$, следовательно, $M \in p$.

Обратно, пусть M — произвольная точка прямой p. Так как $M \in p$ и $p \subset \alpha$, $p \subset \beta$, то $M \in \alpha$, $M \in \beta$. По предыдущей задаче $MB = MC$ и $MA = MC$, следовательно, $M \in \Omega$. ■

§ 12. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

1. Угол между двумя плоскостями

Пусть α и β — две плоскости, пересекающиеся по прямой l. Введем понятие угла между плоскостями α и β. Для этого сначала докажем, что если γ_1 и γ_2 — две произвольные плоскости, перпендикулярные к прямой l, а a_1, b_1 и a_2, b_2 — прямые, по которым эти плос-

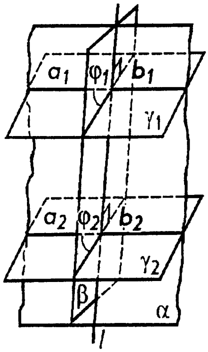


Рис. 15

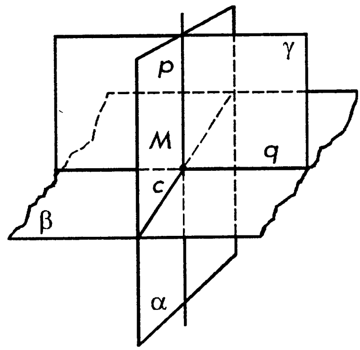


Рис. 16

кости пересекают плоскости α, β (рис. 15), то угол φ_1 между прямыми a_1 и b_1 равен углу φ_2 между прямыми a_2 и b_2. В самом деле, по свойству 2^0 § 11 плоскости γ_1 и γ_2 параллельны, поэтому $a_1 \parallel a_2$ и $b_1 \parallel b_2$ (свойство 3^0 § 8). Отсюда, по лемме 1 § 10, следует, что $\varphi_1 = \varphi_2$.

Углом между двумя данными пересекающимися плоскостями назовем угол между прямыми, по которым эти плоскости пересекаются с произвольной плоскостью, перпендикулярной к линии пересечения данных плоскостей. Если φ — угол между данными пересекающимися плоскостями, то ясно, что $0° < \varphi \leqslant 90°$.

2. Перпендикулярные плоскости

Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°. Из этого определения непосредственно следует, что *любая плоскость, перпендикулярная к прямой пересечения двух перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.*

Рассмотрим некоторые свойства взаимного расположения прямой и перпендикулярных плоскостей.

1^0. *Прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная к линии их пересечения, перпендикулярна к другой плоскости.*

□ Пусть перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c, а p — данная прямая, лежащая в плоскости α и перпендикулярная к прямой c. Докажем, что $p \perp \beta$ (рис. 16).

В плоскости β через точку M пересечения прямых c и p проведем прямую q, перпендикулярную к прямой c, и рассмотрим плоскость γ, проходящую через прямые p и q. По теореме 1 § 11 $\gamma \perp c$, поэтому в силу перпендикулярности плоскостей α и β прямые p и q взаимно перпендикулярны. Таким образом, прямая p перпендикулярна к двум пересекающимся прямым c и q, лежащим в плоскости β. По теореме 1 § 11 $p \perp \beta$. ■

2^0. *Если через точку, лежащую в одной из двух перпендикулярных плоскостей, проходит прямая, перпендикулярная к другой плоскости, то эта прямая лежит в первой плоскости.*

□ Пусть перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c, а прямая p проходит через точку A плоскости α и перпендикулярна к плоскости β. Докажем, что прямая p лежит в плоскости α.

В плоскости α через точку A проведем прямую p', перпендикулярную к прямой c. По свойству 1^0 $p' \perp \beta$. По теореме 3 § 11 прямые p и p' совпадают, следовательно, прямая p лежит в плоскости α. ■

3^0. *Если каждая из двух пересекающихся плоскостей перпендикулярна к третьей плоскости, то линия их пересечения перпендикулярна к этой плоскости.*

□ Пусть $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ и плоскости α и β пересекаются про прямой c. Докажем, что $c \perp \gamma$.

Через некоторую точку прямой c проведем прямую c_1, перпендикулярную к плоскости γ. По свойству 2^0 прямая c_1 лежит как в плоскости α, так и в плоскости β, поэтому она совпадает с прямой c. Таким образом, $c \perp \gamma$. ■

3. Признак перпендикулярности двух плоскостей

Докажем теорему, выражающую признак перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема 1. *Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.*

□ Пусть прямая b, перпендикулярная к плоскости α, лежит в плоскости β. Докажем, что $\alpha \perp \beta$ (рис. 17).

Прямая b пересекает плоскость α в некоторой точке A, поэтому плоскости α и β имеют общую точку, следовательно, пересекаются по некоторой прямой c,

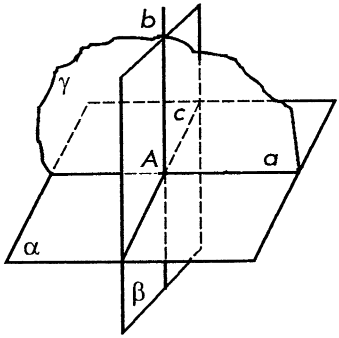


РИС. 17

проходящей через точку A (см. рис. 17). Так как $b \perp \alpha$, то $b \perp c$.

В плоскости α через точку A проведем прямую a, перпендикулярную к прямой c. По теореме 1 § 11 плоскость γ, проходящая через прямые a и b, перпендикулярна к прямой c, поэтому угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b. По условию теоремы $b \perp \alpha$, поэтому $b \perp a$. Следовательно, $\alpha \perp \beta$. ■

Следствие. *Если плоскость перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой плоскости.*

□ Пусть плоскости α и β параллельны, а $\gamma \perp \alpha$. Докажем, что $\gamma \perp \beta$. В плоскости γ проведем прямую p, перпендикулярную к линии пересечения плоскостей α и γ. По свойству 1^0 $p \perp \alpha$, поэтому $p \perp \beta$ (свойство 1^0 § 11). По доказанной теореме $\gamma \perp \beta$. ■

Так как при наложении прямая и перпендикулярная к ней плоскость переходят в прямую и перпендикулярную к ней плоскость, то, как следует из доказанной теоремы, *при наложении перпендикулярные плоскости переходят в перпендикулярные плоскости.*

Пользуясь теоремой 1, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Через прямую, не перпендикулярную к данной плоскости*[1], *проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к этой плоскости.*

---

[1] Мы не исключаем случая, когда прямая лежит в данной плоскости.

□ Пусть прямая p не перпендикулярна к данной плоскости α. Докажем сначала, что через эту прямую проходит плоскость, перпендикулярная к данной плоскости α.

Через какую-нибудь точку прямой p проведем прямую q, перпендикулярную к плоскости α. Прямые p и q не совпадают, так как прямая p не перпендикулярна к плоскости α, а $q \perp \alpha$. Плоскость β, проходящая через прямые p и q, является искомой: в ней лежит прямая q, перпендикулярная к плоскости α.

Если предположить, что через прямую p проходит еще одна плоскость β_1, перпендикулярная к плоскости α, то по свойству 3^0 $p \perp \alpha$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, β — единственная плоскость, проходящая через прямую p и перпендикулярная к плоскости α. ■

§ 13. ПРОЕКЦИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТЬ

1. Проекция прямой на плоскость

Пусть α — данная плоскость, а M — произвольная точка пространства. Проведем через точку M прямую, перпендикулярную к плоскости α, и обозначим через M_1 точку пересечения этой прямой с плоскостью α. Точка M_1 называется *ортогональной проекцией* (или просто *проекцией*) точки M на плоскость α.

Ясно, что любая точка пространства имеет проекцию на данную плоскость, и если точка лежит в данной плоскости, то ее проекция совпадает с самой точкой.

Введем теперь понятие проекции фигуры на плоскость. Пусть α — данная плоскость, а F — произвольная фигура пространства. *Проекцией фигуры F на плоскость α* называется фигура F_1 плоскости α, каждая точка которой является проекцией некоторой точки фигуры F, и проекция каждой точки фигуры F принадлежит фигуре F_1.

Докажем теорему о проекции прямой на плоскость.

Теорема 1. *Если прямая не перпендикулярна к данной плоскости, то ее проекция на эту плоскость есть прямая.*

□ Пусть прямая p не перпендикулярна к данной плоскости α. По теореме 2 § 12 существует плоскость γ, проходящая через прямую p и перпендикулярная к плоскости α. Докажем, что прямая p_1 пересечения плоскостей α и γ есть проекция прямой p на плоскость α. Для этого нужно доказать, что множество всех точек прямой p_1 совпадает со множеством проекций всех точек прямой p на плоскость α.

Пусть M — произвольная точка прямой p, а M_1 — ее проекция на плоскость α. Докажем, что M_1 — точка прямой p_1. Точки M и M_1 лежат на прямой m, проходящей через точку M и перпендикулярной к плоскости α. По свойству 2^0 § 12 прямая m лежит в плоскости γ, поэтому точка M_1, которая лежит на этой прямой, лежит в плоскости γ. Но точка M_1 лежит также в плоскости α, следовательно, M_1 — точка прямой p_1.

Рассмотрим теперь произвольную точку N_1 прямой p_1 и докажем, что N_1 является проекцией некоторой точки прямой p. Для этого через точку N_1 проведем прямую n, перпендикулярную к плоскости α. По свойству 2^0 § 12 эта прямая лежит в плоскости γ. Прямые p и n лежат в плоскости γ и не параллельны (если допустить, что $p \parallel n$, то по свойству 3^0 § 11 $p \perp \alpha$, что противоречит условию теоремы), поэтому они пересекаются в некоторой точке N. Ясно, что N_1 — проекция точки N на плоскость α. ■

Замечание. Отметим, что если прямая перпендикулярна к данной плоскости, то ее проекция на эту плоскость есть точка.

Следствие. *Пусть AB — данный отрезок, а A_1 и B_1 — проекции точек A и B на данную плоскость α, не перпендикулярную к прямой AB. Тогда отрезок A_1B_1 является проекцией отрезка AB на плоскость α.*

□ По доказанной теореме прямая A_1B_1 является проекцией прямой AB на плоскость α. Предлагаем читателю, воспользовавшись тем, что прямые, соединяющие точки прямой AB и их соответствующие проекции, параллельны, самостоятельно убедиться в том, что проекция каждой точки отрезка AB принадлежит отрезку A_1B_1, и обратно, каждая точка отрезка A_1B_1 является проекцией некоторой точки отрезка AB. Таким образом, отрезок A_1B_1 — проекция отрезка AB на плоскость α. ■

Из предыдущего изложения мы заключаем, что проекция любого данного отрезка на плоскость есть либо отрезок, если прямая, содержащая данный отрезок, не перпендикулярна к плоскости, либо одна точка.

Докажем теорему о прямой, перпендикулярной к данной прямой и ее проекции.

Теорема 2. *Прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная к проекции данной прямой на эту плоскость, перпендикулярна к данной прямой. Обратно, прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная к данной прямой, перпендикулярна к проекции данной прямой на эту плоскость.*

□ Пусть a — данная прямая, a_1 — ее проекция на плоскость α, а p — некоторая прямая плоскости α. Если прямые a и a_1 совпадают, то утверждение теоремы очевидно, поэтому докажем теорему в предположении, что a и a_1 — различные прямые (рис. 18).

Докажем сначала, что если $p \perp a_1$, то $p \perp a$. Прямые a и a_1 лежат в некоторой плоскости β, перпендикулярной к плоскости α. Возьмем точку M прямой a, не лежащую в плоскости α, и рассмотрим ее проекцию M_1 на плоскость α (см. рис. 18). Ясно, что прямая MM_1 лежит в плоскости β. Так как $MM_1 \perp \alpha$, то $MM_1 \perp p$. По условию $p \perp a_1$, поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $p \perp \beta$. Отсюда следует, что $p \perp a$.

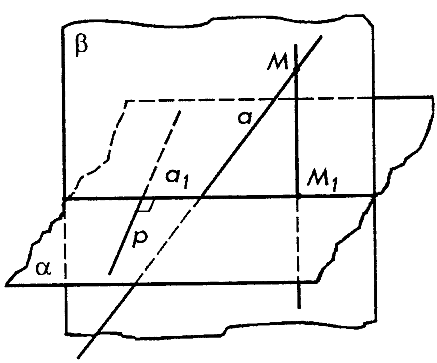


рис. 18

Докажем теперь, что если $p \perp a$, то $p \perp a_1$. Так как $MM_1 \perp p$ и $a \perp p$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $p \perp \beta$. Отсюда следует, что $p \perp a_1$. ■

2. Угол между прямой и плоскостью

Если прямая пересекает данную плоскость и не перпендикулярна к ней, то *углом между этой прямой и данной плоскостью* называется угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость. Если прямая перпендикулярна к данной плоскости, то считают, что угол между этой прямой и плоскостью равен 90°. Таким образом, угол между прямой и плоскостью не больше чем 90°. Предлагаем читателю доказать следующее утверждение: *если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна к ней, то угол между этой прямой и плоскостью есть наименьший из всех углов между этой прямой и любой прямой, лежащей в данной плоскости.*

3. Перпендикуляр и наклонные

Пусть α — некоторая плоскость, A — точка, не лежащая в этой плоскости, а A_1 — проекция точки A на плоскость α. Отрезок AA_1 называется *перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α, а точка A_1 — основанием перпендикуляра*. Если M — точка плоскости α, отличная от точки A_1, то отрезок AM называется *наклонной, проведенной из точки A к плоскости α*, а точка M — *основанием наклонной*. В прямоугольном треугольнике AA_1M гипотенуза AM больше катета AA_1, поэтому *перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.*

Длина перпендикуляра, проведенного из точки к плоскости, называется *расстоянием от этой точки до плоскости*. Таким образом, расстояние от данной точки до плоскости является наименьшим из расстояний между данной точкой и любой точкой плоскости.

Пусть AA_1 — перпендикуляр, а AM — наклонная, проведенные из точки A к плоскости α. Из следствия теоремы 1 мы заключаем, что отрезок A_1M является проекцией наклонной AM на плоскость α. Поэтому, учитывая теорему 2, мы получаем так называемую теорему о трех перпендикулярах, известную читателю из курса стереометрии средней школы: *прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции, перпендикулярна и к самой наклонной.* Из теоремы 2 следует также и теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах: *прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.*

§ 14. РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ

1. Расстояние между параллельными прямыми и плоскостями

Напомним, что в планиметрии было доказано, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой (см. [7] § 19, п. 3). Очевидно, это свойство имеет место и для параллельных прямых пространства. Используя это свойство, вводится понятие расстояния между параллельными прямыми: расстояние от произвольной точки одной из двух параллельных прямых до другой прямой называется *расстоянием между этими прямыми.* Аналогично вводится понятие расстояния между параллельными плоскостями. Напомним, что отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны (свойство 4^0 § 8). Отсюда следует одно из важнейших свойств параллельных плоскостей:

1^0. *Все точки каждой из двух параллельных плоскостей равноудалены от другой плоскости.*

Расстояние от произвольной точки одной из двух параллельных плоскостей до другой плоскости называется *расстоянием между этими параллельными плоскостями.* Очевидно, расстояние между данными параллельными плоскостями является наименьшим из расстояний между любыми двумя точками, лежащими соответственно в этих плоскостях.

Введем теперь понятие расстояния между прямой и параллельной ей плоскостью. Для этого докажем утверждение.

2^0. *Все точки прямой, параллельной данной плоскости, равноудалены от этой плоскости.*

□ Пусть прямая p параллельна плоскости α. Через некоторую точку прямой p проведем плоскость β, параллельную плоскости α. Прямая p лежит в плоскости β, так как в противном случае по свойству 1^0 § 8 она должна пересечь плоскость α, что невозможно. Отсюда следует, что расстояние от любой точки прямой p до плоскости α равно расстоянию между параллельными плоскостями α и β, т. е. все точки прямой p равноудалены от плоскости α. ■

Расстояние от произвольной точки прямой до параллельной ей плоскости называется *расстоянием от данной прямой до этой плоскости.*

Докажем теорему, аналогичную теореме 3 § 19 [7].

Теорема. *Фигура, состоящая из множества всех точек пространства, лежащих по одну сторону от данной плоскости и отстоящих от этой плоскости на данном расстоянии, есть плоскость, параллельная данной.*

□ Пусть α — данная плоскость, λ — одно из полупространств с границей α, а d — данное положительное число. Проведем луч, исходящий из некоторой точки A плоскости α, перпендикулярный к плоскости α и расположенный в полупространстве λ, и на этом луче отложим отрезок AB, длина которого равна d. Проведем теперь через точку B плоскость β, параллельную плоскости α, и докажем, что данное в теореме множество Ω точек состоит из всех точек плоскости β.

Так как все точки плоскости β равноудалены от плоскости α (см. 1^0), то все точки плоскости β принадлежат множеству Ω.

Рассмотрим теперь точку M полупространства λ, не лежащую в плоскости β, и докажем, что $M \notin \Omega$. Пусть MH — перпендикуляр, проведенный из точки M к плоскости α, а P — точка пересечения прямой MH с плоскостью β. Так как $PH = d$, то $MH \neq d$, поэтому $M \notin \Omega$. Итак, множество Ω совпадает с множеством всех точек плоскости β. ■

2. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми вводится на основании следующей леммы.

Лемма. *Существует одна и только одна прямая,* *перпендикулярная к данным скрещивающимся прямым и пересекающая каждую из них.*

□ Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые. Докажем сначала, что существует прямая, пересекающая прямые a и b и перпендикулярная к каждой из них. Для этого, воспользовавшись теоремой 2 § 9, через прямые a и b проведем соответственно плоскости α и β так, чтобы они были параллельны друг другу. Проведем через прямые a и b соответственно плоскости γ_1 и γ_2, перпендикулярные к плоскости α (теорема 2 § 12). По следствию теоремы 1 § 12 эти плоскости перпендикулярны также к плоскости β (рис. 19).

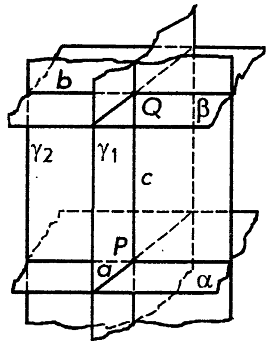


РИС. 19

Плоскости γ_1 и γ_2 не параллельны, так как согласно теореме 2 § 9 через прямые a и b проходит только одна пара параллельных плоскостей α и β. Следовательно, плоскости γ_1 и γ_2 пересекаются по некоторой прямой c. По свойству 3^0 § 12 $c \perp \alpha$ и $c \perp \beta$, поэтому $c \perp a$, $c \perp b$. Пусть прямая c пересекает плоскости α и β соответственно в точках P и Q. Точка P — общая точка плоскостей γ_1 и α, которые пересекаются по прямой a, поэтому $P \in a$. Аналогично, $Q \in b$. Итак, прямая PQ пересекает прямые a и b и перпендикулярна к каждой из них.

Докажем теперь, что PQ — единственная прямая, которая перпендикулярна к прямым a и b и пересекает эти прямые. Пусть P_1Q_1 — другая прямая, обладающая этими свойствами, $P_1 \in a$ и $Q_1 \in b$. Нетрудно видеть, что $P_1Q_1 \perp \alpha$, поэтому согласно свойству 4^0 § 11 $P_1Q_1 \parallel PQ$. Отсюда следует, что точки P, Q, P_1, Q_1 лежат в одной плоскости, следовательно, и прямые a и b лежат в этой плоскости. Этот вывод противоречит определению скрещивающихся прямых. ■

Отрезок называется *общим перпендикуляром* данных скрещивающихся прямых, если его концы лежат соответственно на этих прямых и он перпендикулярен к каждой из них. Из предыдущей леммы следует, что любые две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, притом только один. На основе этого утверждения вводится следующее определение: *расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*

Нетрудно доказать, что *расстояние между данными скрещивающимися прямыми является наименьшим из расстояний между любыми двумя точками, лежащими соответственно на этих прямых.* В самом деле, пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые, PQ — их общий перпендикуляр, а X и Y — произвольные точки, лежащие соответственно на прямых a и b. Рассмотрим параллельные плоскости α и β, содержащие соответственно прямые a и b. Длина отрезка PQ есть расстояние между плоскостями α и β. Так как точки X и Y лежат соответственно в этих плоскостях, то $PQ \leqslant XY$.

§ 15. ТЕТРАЭДР И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Глава VI нашего курса посвящена изучению многогранников, т. е. геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Однако до подробного изучения этих фигур мы введем здесь два простейших вида многогранников — тетраэдр и параллелепипед, известные читателю из курса стереометрии средней школы. Это даст нам возможность проиллюстрировать свойства взаимного расположения прямых и плоскостей на примерах простейших геометрических тел.

1. Тетраэдр

Рассмотрим четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости. Соединив эти точки попарно отрезками, получим четыре треугольника:

$$ABC,\ ABD,\ BCD,\ CAD. \qquad (1)$$

Фигура, образованная из этих треугольников, называется *тетраэдром*[1] и обозначается через $ABCD$ (рис. 20а). Треугольники (1) называются *гранями,* их

[1] Тетраэдром $ABCD$ называется также геометрическое тело, поверхностью которого является фигура, образованная из треугольников (1) (см. ниже, § 26).

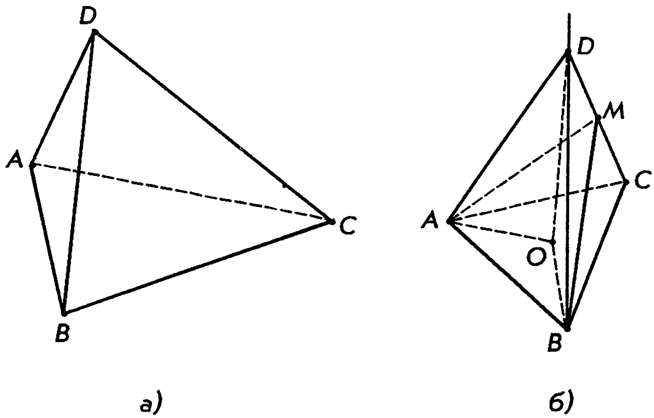


рис. 20

стороны — *ребрами*, а вершины треугольников — *вершинами* тетраэдра. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются *противоположными*. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины.

Тетраэдр, у которого все ребра равны, называется *правильным*. Нетрудно доказать, что *существует правильный тетраэдр, ребра которого равны произвольно заданному отрезку PQ*. В самом деле, рассмотрим равносторонний треугольник ABC, стороны которого равны PQ (см. [7] § 30, утверждение 1^0) и обозначим через O центр описанной около него окружности. Проведем прямую ON, перпендикулярную к плоскости ABC (рис. 20б). Так как $OA < PQ$, то в плоскости AON на луче ON существует такая точка D, что $AD = PQ$ (см. [7] § 30, утверждение 2^0). Согласно задаче 2 § 11 $DA = DB = DC$, поэтому $ABCD$ — правильный тетраэдр.

Правильный тетраэдр обладает рядом интересных свойств, которые будут рассмотрены в главе VI. Здесь же, в качестве примера, рассмотрим только одно из этих свойств.

Задача. Доказать, что противоположные ребра правильного тетраэдра принадлежат взаимно перпендикулярным скрещивающимся прямым.

□ Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Докажем, например, что AB и CD — скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые. По определению тетраэдра его вершины A, B, C, D не лежат в одной плоскости, поэтому прямые AB и CD не могут лежать в одной плоскости, следовательно, AB и CD скрещивающиеся прямые.

Докажем, что $AB \perp CD$. Пусть M — середина ребра CD (см. рис. 20б). Тогда отрезки AM и BM — медианы равносторонних треугольников ACD и BCD, поэтому AM и BM — высоты этих треугольников. Отсюда следует, что $AM \perp CD$ и $BM \perp CD$. По теореме 1 § 11 прямая CD перпендикулярна к плоскости ABM, следовательно, $AB \perp CD$. ■

2. Параллелепипед

Рассмотрим две параллельные плоскости α и β и параллелограмм $ABCD$, расположенный в плоскости α. Через точки A, B, C и D проведем параллельные друг другу прямые, пересекающие плоскость β в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Получим шесть четырехугольников:

$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1,\ ABCD,\ A_1B_1C_1D_1. \quad (2)$$

Эти четырехугольники являются параллелограммами (рис. 21а).

В самом деле, по свойству 4° § 8 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, следовательно, первые четыре из четырехугольников (2) являются параллелограммами. Да-

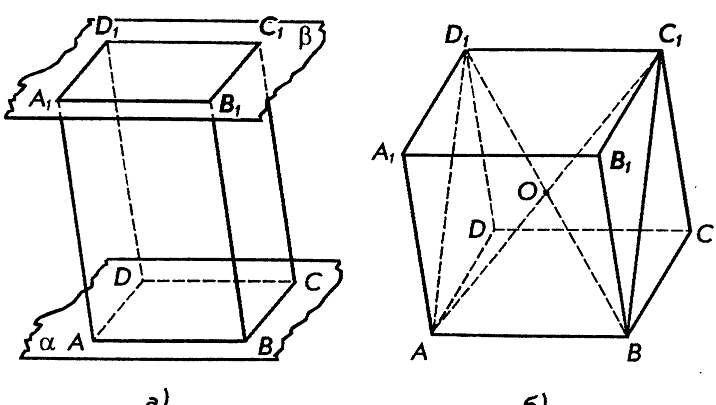


РИС. 21

лее, так как ABB_1A_1, DCC_1D_1, $ABCD$ — параллелограммы, то $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \parallel DC$, $DC \parallel D_1C_1$, следовательно, $A_1B_1 \parallel D_1C_1$; аналогично, $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, поэтому $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

Фигура, образованная из шести параллелограммов (2), называется параллелепипедом[1] и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелограммы (2) называются *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины параллелограммов — *вершинами* параллелепипеда. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются противоположными, а отрезок, соединяющий противоположные вершины — *диагональю* параллелепипеда. Параллелепипед имеет четыре диагонали. Диагоналями параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1. Грани параллелепипеда, не имеющие общих ребер, называются *противоположными*. Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их *основаниями*, а остальные грани — *боковыми гранями* параллелепипеда.

Параллелепипед обладает рядом свойств, которые часто используются при решении задач.

1^0. *Противоположные грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях.*

2^0. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.*

3^0. *Середины отрезков, соединяющих середины параллельных ребер, не лежащих в одной грани, совпадают с точкой пересечения диагоналей параллелепипеда.*

Докажем, например, свойство 2^0. Доказательство остальных свойств предоставим читателю.

□ Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед. Возьмем середину O диагонали AC_1 и докажем, что точка O является серединой всех остальных диагоналей BD_1, CA_1 и DB_1. В самом деле, четырехугольник ABC_1D_1 является параллелограммом, так как $AB \parallel D_1C_1$ и $AB = D_1C_1$ (рис. 21б). Поэтому диагонали

---

[1] Параллелепипедом $ABCDA_1B_1C_1D_1$ называется также геометрическое тело, поверхностью которого является фигура, образованная из параллелограммов (2) (см. ниже, § 29).

AC_1 и BD_1 этого параллелограмма пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, т. е. точка O — середина диагонали BD_1 данного параллелепипеда. Аналогично, рассматривая четырехугольники BCD_1A_1 и CDA_1B_1, мы приходим к выводу, что O — середина диагоналей CA_1 и DB_1. ■

3. Прямоугольный параллелепипед

Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются *боковыми ребрами*. Ясно, что параллелепипед имеет четыре боковых ребра, которые попарно параллельны.

Параллелепипед называют *прямоугольным*, если его боковые ребра перпендикулярны к основаниям, а основания являются прямоугольниками.

Докажем, что *все шесть граней прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники*. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный прямоугольный параллелепипед, а $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ его основания. По определению боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны к его основаниям. Отсюда следует, что $AA_1 \perp AB$, поэтому в параллелограмме AA_1B_1B угол A — прямой, т. е. этот параллелограмм — прямоугольник. Точно так же доказывается, что остальные боковые грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

62. Плоскость параллельна одной из двух данных прямых и перпендикулярна к другой прямой. Доказать, что данные прямые перпендикулярны.

63. Плоскость α и прямая a перпендикулярны к прямой b. Доказать, что прямая a либо лежит в плоскости α, либо параллельна этой плоскости.

64. Одна из двух данных плоскостей параллельна плоскости α, а другая перпендикулярна к этой плоскости. Доказать, что данные плоскости перпендикулярны.

65. Одна из двух данных плоскостей параллельна данной прямой, а другая — перпендикулярна к этой прямой. Доказать, что данные плоскости перпендикулярны.

66. Данные прямая и плоскость перпендикулярны к плоскости α. Доказать, что данная прямая либо лежит в данной плоскости, либо параллельна этой плоскости.

67. Плоскости α и β перпендикулярны к плоскости γ. Доказать, что если три плоскости α, β и γ не имеют ни одной общей точки, то плоскости α и β параллельны.

68. Прямая a перпендикулярна к плоскости α, а прямая b — к плоскости β. Доказать, что две плоскости α и β: а) перпендикулярны тогда и только тогда, когда прямые a и b перпендикулярны; б) параллельны тогда и только тогда, когда прямые a и b параллельны или совпадают.

69. Существует ли такая точка пространства, через которую проходят четыре попарно перпендикулярные прямые (плоскости)? Ответ обосновать.

70. Доказать, что множество всех прямых, каждая из которых проходит через данную точку A и перпендикулярна к данной прямой, не проходящей через точку A, есть пучок пересекающихся прямых с центром A и плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной к данной прямой.

71. Прямая a не перпендикулярна к плоскости α. Доказать, что множество всех прямых, лежащих в плоскости α, каждая из которых перпендикулярна к прямой a, есть пучок параллельных прямых с плоскостью α.

72. Даны три плоскости, которые не имеют ни одной общей точки и попарно пересекаются по прямым a, b и c. Через точку A, не лежащую в данных плоскостях, проведены перпендикуляры AB_1, AB_2, AB_3 к данным плоскостям и перпендикуляры AC_1, AC_2, AC_3 к прямым a, b и c. Доказать, что прямые AB_1, AB_2, AB_3, AC_1, AC_2, AC_3 лежат в одной плоскости.

73. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Доказать, что через каждую точку пространства проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная к прямым a и b.

74. Даны две непараллельные прямые a и b и плоскость α. Найти множество всех прямых, каждая из которых лежит в плоскости α и перпендикулярна к прямым a и b.

75. Доказать, что лучи O_1A_1 и O_2A_2, не лежащие на одной прямой, сонаправлены (противоположно направлены) тогда и только тогда, когда прямые O_1A_1 и O_2A_2 параллельны и точки A_1 и A_2 лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой O_1O_2.

76. Даны лучи O_1A_1, O_2A_2 и O_2A_2', где O_2A_2' — продолжение луча O_2A_2. Доказать, что: а) если $O_1A_1 \uparrow\uparrow O_2A_2$, то $O_1A_1 \uparrow\downarrow O_2A_2'$; б) если $O_1A_1 \uparrow\downarrow O_2A_2$, то $O_1A_1 \uparrow\uparrow O_2A_2'$.

77. Даны три луча O_1A_1, O_2A_2 , O_3A_3, удовлетворяющие условиям: $O_1A_1 \uparrow\uparrow O_2A_2$, $O_2A_2 \uparrow\uparrow O_3A_3$. Доказать, что $O_1A_1 \uparrow\uparrow O_3A_3$.

78. Даны три луча O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3, удовлетворяющие условиям: $O_1A_1 \uparrow\downarrow O_2A_2$, $O_2A_2 \uparrow\downarrow O_3A_3$. Доказать, что $O_1A_1 \uparrow\uparrow O_3A_3$.

79. Доказать, что два угла равны, если их стороны соответственно противоположно направлены.

80. Доказать, что угол между двумя данными пересекающимися прямыми равен углу между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным прямым.

81. Плоскость, проходящая через пересекающиеся прямые a и b, параллельна или совпадает с плоскостью, проходящей через пересекающиеся прямые a' и b'. Доказать, что если $a \perp a'$ и $b \perp b'$, то угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a' и b'.

82. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Через произвольную точку M_1 пространства, не лежащую на этих прямых, проведены прямые a_1 и b_1, соответственно параллельные прямым a и b. Доказать, что угол между прямыми a_1 и b_1 не зависит от выбора точки M_1.

83. Доказать, что фигура, состоящая из множества всех точек пространства, каждая из которых является серединой отрезка, концы которого лежат на двух параллельных плоскостях, есть плоскость, параллельная данным и равноудаленная от них.

84. Найти фигуру, состоящую из множества всех точек пространства, равноудаленных от двух данных а) параллельных прямых; б) пересекающихся прямых.

85. Найти фигуру, состоящую из множества всех точек пространства, каждая из которых является серединой отрезка, один конец которого лежит на данной плоскости, а другой конец — на данной прямой, параллельной этой плоскости.

86. Из точки, не лежащей в данной плоскости, проведены к этой плоскости две наклонные. Доказать, что: а) эти наклонные равны тогда и только тогда, когда их проекции на данную плоскость равны; б) одна из наклонных больше другой тогда и только тогда, когда ее проекция на данную плоскость больше проекции другой наклонной.

87. Из точки A, не лежащей в плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AH и наклонная AB. Доказать, что фигура, состоящая из множества всех точек плоскости α, каждая из которых есть проекция точки A на какую-нибудь прямую пучка с центром B и плоскостью α, есть окружность с диаметром HB.

88. Доказать, что шестиугольник плоскости α, описанный около окружности, является проекцией на эту плоскость некоторого пространственного шестиугольника[1], любые две противоположные стороны которого лежат в одной плоскости.

С помощью этого утверждения доказать, что отрезки, соединяющие противоположные вершины данного шестиугольника, пересекаются в одной точке (теорема Брианшона).

89. Прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна к ней. Доказать, что угол между этой прямой и плоскостью есть наименьший из всех углов между этой прямой и любой прямой, лежащей в данной плоскости.

90. Из точки A, не лежащей в данной плоскости α, проведены перпендикуляр AH и наклонная AB. Доказать, что углы между прямой AB и двумя пересекающимися прямыми плоскости α равны тогда и только тогда, когда равны углы между прямой BH и этими прямыми.

91. Углы между данной прямой и прямыми, содержащими стороны треугольника ABC, равны. Доказать, что данная прямая перпендикулярна к плоскости ABC.

---

[1] Многоугольник называется пространственным, если его вершины не лежат в одной плоскости.

92. Доказать, что расстояние от прямой до плоскости, параллельной этой прямой, меньше или равно расстоянию от любой точки прямой до любой точки плоскости.

93. Расстояния от двух точек до плоскости равны a и b, где $a \geqslant b$. Найти расстояние от середины отрезка с концами в данных точках до плоскости[1], если данные точки лежат: а) по одну сторону от плоскости; б) по разные стороны от плоскости.

94. Расстояния от вершин треугольника, лежащих по одну сторону от плоскости, до данной плоскости равны a, b, c. Найти расстояние от точки пересечения медиан треугольника до данной плоскости.

95. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Доказать, что существует такая плоскость, что перпендикуляр, проведенный из любой точки прямой a к прямой b, параллелен этой плоскости или лежит в ней. При каком расположении прямых a и b существует плоскость, в которой лежат все эти перпендикуляры?

96. Отрезок AB является общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AA_1 и BB_1, угол между которыми равен $60°$, а отрезок A_1B_1 — перпендикуляр, проведенный из точки A_1 к прямой BB_1. Доказать, что: а) $AA_1 = 2BB_1$; б) если точки M и N на лучах AA_1 и BB_1 выбраны так, что $AM = 2BN$, то $MN \perp BB_1$.

97. Доказать, что угол между двумя пересекающимися плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными к этим плоскостям.

98. Две плоскости пересекаются по прямой l. Доказать, что угол между произвольной прямой, лежащей в одной из этих плоскостей и пересекающей прямую l, и другой плоскостью является наибольшим, когда прямая перпендикулярна к прямой l.

99. Через точку, лежащую на прямой l, по которой пересекаются две плоскости, в каждой из плоскостей проведена прямая, одна из которых перпендикулярна к l, а угол между второй прямой и прямой l равен

---

[1] Расстоянием от точки, лежащей в плоскости, до этой плоскости назовем число ноль.

φ. Найти угол θ между этими прямыми, если угол между данными плоскостями равен ψ.

100. Доказать, что при наложении сохраняется угол между: а) прямой и плоскостью; б) двумя плоскостями.

101. Доказать, что при наложении сохраняется расстояние: а) между параллельными прямыми; б) от точки до плоскости; в) между прямой и параллельной ей плоскостью; г) между параллельными плоскостями.

102. Доказать, что при наложении скрещивающиеся прямые переходят в скрещивающиеся прямые и сохраняется угол и расстояние между ними.

103. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. Проекция M_1 точки M на плоскость ABC лежит внутри треугольника и расстояния от точки M до прямых AB, BC, CA равны $8\frac{2}{3}$ см. Доказать, что точка M не лежит в плоскости треугольника, и найти расстояние от точки M до плоскости ABC.

104. Плоскости α и β пересекаются по прямой AB, и угол между этими плоскостями равен 45°. Вершина C прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой $AB = a$ и острым углом $\hat{B} = 30^\circ$ лежит в плоскости α. Найти расстояние от точки C до плоскости β.

105. Плоскости α и β, угол между которыми равен 30°, пересекаются по прямой AC. Из точки B плоскости α проведен перпендикуляр BH к плоскости β, $BH = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Найти угол между прямыми AB и AC.

106. Вершины A и B прямоугольного треугольника ABC лежат в плоскости α, а вершина C прямого угла не лежит в этой плоскости. Найти углы этого треугольника, если угол между прямой AC и плоскостью α равен 15°, а угол между прямой BC и этой плоскостью равен 75°.

107. Прямая CE параллельна плоскости α, проходящей через точку D, а CH — перпендикуляр к этой плоскости. Найти угол θ между плоскостями α и DCE, если $CD = \sqrt{3}CH$ и угол между прямыми CE и CD равен 60°.

108. Прямая AB параллельна плоскости α, а прямые AA_1 и BB_1 перпендикулярны к прямой AB и пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1. Найти расстояние от прямой AB до плоскости α, если $AB = a$, $A_1B_1 = b$ $(b > a)$, углы между прямыми AA_1 и BB_1 и плоскостью α соответственно равны 45° и 30°.

109. В параллелограмме $ABCD$ $AB : AD = 1 : 2$. Сторона AB лежит в плоскости α, а расстояние от точки C до плоскости α равно расстоянию от точки A до прямой BC. Найти угол между плоскостями α и ABC.

110. Доказать, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на данную плоскость, если эти проекции являются параллельными прямыми, или если одна из проекций — точка, а другая — прямая.

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД И ТЕТРАЭДР

111. Точки M и N лежат на ребрах DB и DC тетраэдра $ABCD$. Доказать, что пары прямых AB и MN, AC и MN, AD и MN являются скрещивающимися прямыми.

112. Плоскость α пересекает ребра BD и CD тетраэдра $DABC$ в точках M и N и параллельна прямым AD и BC. Доказать, что: а) плоскость α пересекает ребра AB и AC в точках P и Q, причем $MNQP$ — параллелограмм; б) $\frac{DM}{MB} = \frac{DN}{NC}$.

113. Доказать, что противоположные грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях.

114. Доказать, что в произвольном параллелепипеде точка пересечения диагоналей является серединой всех шести отрезков, каждый из которых соединяет середины параллельных ребер параллелепипеда, не лежащих в одной грани.

115. Доказать, что две прямые являются скрещивающимися прямыми, если они содержат: а) диагональ параллелепипеда и ребро, не имеющее общей вершины с диагональю; б) диагональ параллелепипеда и диагональ какой-нибудь грани, не имеющие общей вершины; в) диагонали двух смежных граней, не имеющие общей вершины; г) не параллельные диагонали двух противоположных граней.

116. Точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 являются серединами ребер AB, AA_1, A_1B_1, CC_1, CD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В каждом из следующих примеров выяснить взаимное расположение прямой и плоскости: а) K_2K_3 и $K_1K_4K_5$; б) K_1K_4 и AB_1D; в) B_1K_5 и $K_2K_3K_4$; г) BD и $K_2K_3K_5$; д) B_1K_5 и K_2K_4D.

117. Доказать, что диагональ прямоугольного параллелепипеда не перпендикулярна: а) ни к одному из его ребер;[1] б) ни к одной из диагоналей его граней, если параллелепипед имеет попарно различные измерения.

118. Доказать, что диагональ куба: а) перпендикулярна к диагонали каждой его грани, если эта диагональ не имеет общего конца с данной диагональю куба; б) перпендикулярна к плоскости, проходящей через три вершины куба, соседних с одним из концов данной диагонали.

119. Доказать, что прямоугольный параллелепипед является кубом, если выполняется хотя бы одно из условий: а) его диагональ перпендикулярна к каким-нибудь двум не параллельным друг другу диагоналям граней; б) его диагональ перпендикулярна к одной из плоскостей, проходящих через три вершины параллелепипеда, соседних с одним из концов данной диагонали.

120. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра DD_1, а O — середина диагонали AC_1. Доказать, что: а) грань $ABCD$ является квадратом тогда и только тогда, когда отрезок OM перпендикулярен к одной из диагоналей параллелепипеда, не имеющих общих концов с ребром DD_1; б) если отрезок OM перпендикулярен к одной из указанных выше диагоналей, то он перпендикулярен и к другой диагонали.

121. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра DD_1. Выяснить, являются ли перпендикулярными: а) какие-нибудь две диагонали куба; б) плоскости AC_1C и BD_1D; в) плоскости AC_1M и CA_1M.

122. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол θ между: а) плоскостями ABC и AC_1M, где M — середина ребра DD_1; б) прямыми AC_1 и BP, где P — середина ребра CD; в) прямыми BK и AN, где K — середина

---

[1] Отрезки AB и CD будем называть перпендикулярными, если прямые AB и CD перпендикулярны.

ребра CD, а N — точка, лежащая на ребре BB_1, и $BN : NB_1 = 2 : 1$.

123. Дан куб с ребром a. Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, содержащими: а) диагональ куба и какое-нибудь ребро куба; б) диагональ куба и диагональ какой-нибудь грани; в) диагонали двух граней.

124. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Найти угол θ между плоскостями ABC и AC_1M, где M — середина ребра BB_1.

125. Дан тетраэдр $ABCD$, у которого плоскости граней ABC и BCD перпендикулярны и углы CBD и BAC прямые. Доказать, что плоскости граней ACD и ABD перпендикулярны.

126. Точки M и N являются серединами ребер AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$. Найти угол θ между прямой MN и плоскостью ABC.

127. В тетраэдре $ABCD$ $AC = CB = 5$ см, $DB = 5\sqrt{5}$ см. Углы DAB, DAC, ACB — прямые. Найти угол между плоскостями ABC и BCD.

128. В произвольном тетраэдре расстояния от концов одного из ребер до прямой, содержащей противоположное ребро, равны m_1 и m_2, а расстояния от тех же вершин до плоскостей противоположных граней равны h_1 и h_2. Доказать, что $\frac{h_1}{m_1} = \frac{h_2}{m_2}$.

129. Дан правильный тетраэдр, ребро которого равно a. Найти расстояние: а) между прямыми, содержащими противоположные ребра; б) от вершины до плоскости противоположной грани.

130. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, ребро которого равно a. Найти расстояние между прямыми AM и DN, где M и N — середины ребер BC и AC.

Глава IV

ДВИЖЕНИЯ И ПОДОБИЯ

§ 16. ДВИЖЕНИЯ. ГРУППА ДВИЖЕНИЙ

1. Понятие движения, примеры

Настоящая глава посвящена важнейшим преобразованиям пространства — движениям и подобиям. Многие определения и теоремы этой главы аналогичны тем, которые рассматривались в планиметрии в главах VII и VIII.

Говорят, что преобразование пространства *сохраняет расстояния*, если расстояние между любыми двумя точками A и B пространства равно расстоянию между их образами A' и B', т. е. $AB = A'B'$.

Преобразование пространства, сохраняющее расстояния, называется *движением* (*перемещением*) пространства.

Наиболее простым примером движения является *тождественное преобразование* пространства, т. е. преобразование, при котором каждая точка пространства переходит в себя. Рассмотрим другие примеры движений.

Пример 1. (Симметрия относительно плоскости). Две точки M и M' называются *симметричными относительно плоскости* α, если эта плоскость перпендикулярна к отрезку MM' и проходит через его середину. Каждая точка плоскости α симметрична самой себе.

Симметрией относительно плоскости α (отражением от плоскости α) называется отображение пространства, при котором каждая точка X переходит в точку X', симметричную точке X относительно плоскости α.

Очевидно, симметрия относительно плоскости является преобразованием пространства. Докажем, что она сохраняет расстояния, т. е. является движением. Пусть M и N — две точки пространства, а M' и N' — их образы. Докажем, что $MN = M'N'$. Рассмотрим прямые MM' и NN', которые обозначим соответственно через m и n (если точки M и M' совпадают, то через m обозначается прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная к плоскости α; аналогично для прямой n). Так как $m \perp \alpha$ и $n \perp \alpha$, то m и n либо совпадают, либо параллельны, поэтому они лежат в некоторой плоскости. В этой плоскости β отрезки MN и $M'N'$ симметричны относительно прямой, по которой пересекаются плоскости α и β, поэтому $MN = M'N'$.

Пример 2. (Центральная симметрия). Точки M и M' называются *симметричными относительно точки* O, если O — середина отрезка MM'. Точка O симметрична самой себе.

Симметрией относительно точки O (отражением от точки O или центральной симметрией) называется отображение пространства, при котором каждая точка X переходит в точку X', симметричную точке X относительно точки O.

Докажем, что симметрия относительно точки O является движением. Пусть M и N — две точки пространства, а M' и N' — их образы. Прямые MM' и NN' лежат в одной плоскости с точкой O, и в этой плоскости они симметричны относительно точки O, поэтому $MN = M'N'$.

Рассмотрим еще один пример движения пространства — параллельный перенос. Для этого, так же как и на плоскости (см. [7] § 32, п. 2), введем понятие направленного отрезка в пространстве. Отрезок называется *направленным*, если его граничные точки заданы в определенном порядке. Если A — первая точка, а B — вторая, то точка A называется началом, а B — концом направленного отрезка, и этот отрезок обозначается через $\overline{AB}$. В целях общности каждую точку рассматривают как направленный отрезок, у которого начало совпадает с концом (нулевой направленный отрезок).

Так же как и для направленных отрезков на плоскости, вводятся понятия длины направленного отрезка, одинаково направленных и противоположно направленных отрезков.

Направленные отрезки называются *равными*, если они одинаково направлены и их длины равны. В пространстве, так же как и на плоскости, имеет место следующий признак равенства направленных отрезков: направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают.

Пример 3. (Параллельный перенос). *Параллельным переносом на данный направленный отрезок* $\overline{PQ}$ называется отображение пространства, при котором каждая точка X отображается в такую точку X', что $\overline{XX'} = \overline{PQ}$. Доказательство того, что параллельный перенос пространства является движением, дословно повторяет доказательство соответствующего утверждения на плоскости (пример 4 § 32 [7]), поэтому мы его опускаем.

Так же как и в планиметрии, тождественное преобразование рассматривают как частный случай параллельного переноса, а именно как параллельный перенос на нулевой направленный отрезок.

2. Произведение движений

Понятие произведения двух преобразований пространства вводится так же, как и для преобразований плоскости. Пусть f и g — данные преобразования. Каждой точке M пространства поставим в соответствие точку M' по следующему закону: $M_1 = g(M)$, $M' = f(M_1)$. Тогда определяется новое отображение пространства, переводящее точку M в точку M': $M' = f(g(M))$. Оно обозначается так: fg и называется *произведением* (или композицией) преобразований g и f. Ясно, что fg есть преобразование пространства. Если g и f — движения, то каждое из этих преобразований сохраняет расстояния, поэтому и преобразование fg сохраняет расстояния. Итак, *произведение двух движений есть движение.*

Понятие произведения движений может быть использовано для определения новых видов движений. Рассмотрим примеры.

Пример 4. (Поворот вокруг прямой). Пусть a — данная прямая, а φ — градусная мера некоторого угла. Проведем через прямую a две плоскости α_1 и α_2, угол между которыми равен $\frac{1}{2}\varphi$, и рассмотрим симметрии g_1 и g_2 относительно плоскостей α_1 и α_2. Тогда g_2g_1 является движением. Очевидно, при этом движении каждая точка прямой a переходит в себя, а все

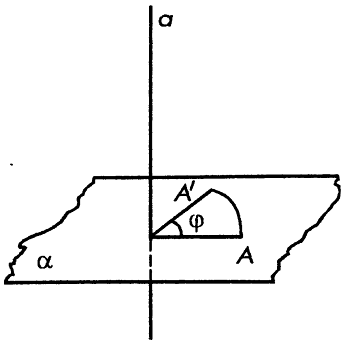


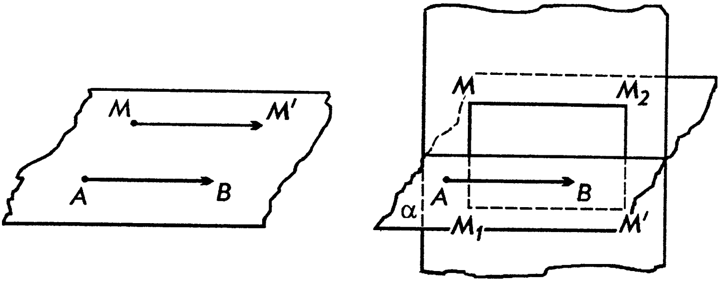
РИС. 22

точки любой плоскости α, перпендикулярной к этой прямой, переходят в точки, лежащие в этой же плоскости. При этом в плоскости α порождается поворот вокруг точки пересечения плоскости α и прямой a на угол φ (рис. 22), причем во всех плоскостях, перпендикулярных к прямой a, поворот происходит в одном и том же направлении — по часовой стрелке или против часовой стрелки. Такое движение пространства называется *поворотом вокруг прямой a* (ось поворота) *на угол φ* (угол поворота).

Если $\varphi = 180^\circ$, то плоскости α_1 и α_2 взаимно перпендикулярны и при движении g_2g_1 каждая точка M пространства переходит в точку M', симметричную точке M относительно прямой a (т. е. $MM' \perp a$ и середина отрезка MM' лежит на прямой a). Поворот вокруг прямой a на угол 180° называется также *симметрией относительно прямой a* или отражением от прямой a.

Важно отметить, что если $\varphi < 180^\circ$, т. е. если плоскости α_1 и α_2 не взаимно перпендикулярны, то в определении поворота вокруг прямой существенен порядок, в котором рассматриваются движения g_1 и g_2, т. е. движения g_2g_1 и g_1g_2 не совпадают. Движение g_1g_2 также является поворотом вокруг прямой a на угол φ, но только в другом направлении. Если $\varphi = 180^\circ$, то движения g_2g_1 и g_1g_2 совпадают: оно является симметрией относительно прямой a.

Пример 5. (Скользящее отражение). Пусть α — произвольная плоскость пространства, а A и B — две точки в этой плоскости. Рассмотрим отражение g_1 от плоскости α и параллельный перенос g_2 на направленный отрезок $\overline{AB}$. Произведение $g = g_2g_1$ является движением, которое называется *скользящим отражением*.



а) б)

РИС. 23

Нетрудно убедиться в том, что $g_2g_1 = g_1g_2$, т. е. для любой точки M пространства $g_2g_1(M) = g_1g_2(M)$. Если $M \in \alpha$, то это утверждение очевидно (рис. 23а): $g_2g_1(M) = g_2(M) = M'$, $g_1g_2(M) = g_1(M') = M'$. Если же $M \notin \alpha$, то равенство $g_2g_1(M) = g_1g_2(M)$ легко обосновать, пользуясь рис. 23б (на этом рисунке $g_1(M) = M_1$, $g_2(M) = M_2$, $g_2(M_1) = M'$): $g_2g_1(M) = g_2(M_1) = M'$, $g_1g_2(M) = g_1(M_2) = M'$, т. к. $MM_1M'M_2$ — прямоугольник, и поэтому точки M_2 и M' симметричны относительно плоскости α.

Таким образом, при определении скользящего отражения не существенен порядок, в котором рассматриваются отражение g_1 и параллельный перенос g_2.

3. Движение, обратное данному движению

Пусть f — данное преобразование пространства. Каждой точке пространства поставим в соответствие ее прообраз при преобразовании f. Тогда определяется новое преобразование пространства, которое обозначают через f^{-1} и называют *преобразованием, обратным* к f. Если g — движение, т. е. преобразование, которое сохраняет расстояния, то, очевидно, и преобразование g^{-1} сохраняет расстояния, т. е. является движением. Например, если g — параллельный перенос на направленный отрезок $\overline{AB}$, то, очевидно, g^{-1} есть также параллельный перенос на направленный отрезок $\overline{BA}$. Если g — поворот вокруг оси a на угол φ в одном направлении, то g^{-1} есть поворот вокруг оси

a на угол φ в другом направлении. Интересно отметить, что движение g, обратное отражению от плоскости, совпадает с самим движением, т. е. $g^{-1} = g$. Аналогично, движение, обратное симметрии относительно точки, совпадает с самим движением.

4. Группа движений пространства

Рассмотрим множество D всех движений пространства. В п. 2 было доказано, что если $f \in D$, $g \in D$, то $fg \in D$. Кроме того, если $f \in D$, то $f^{-1} \in D$.

Докажем, что *если h, f, g — произвольные движения пространства, а e — тождественное преобразование, то имеют место равенства*

$$g^{-1}g = gg^{-1} = e, \tag{1}$$

$$h(fg) = (hf)g. \tag{2}$$

Докажем сначала равенства (1). Пусть M — произвольная точка пространства, $M_1 = g(M)$, $M_2 = g^{-1}(M)$. Тогда, очевидно, $g^{-1}(M_1) = M$, $g(M_2) = M$, поэтому $(g^{-1}g)(M) = g^{-1}(g(M)) = g^{-1}(M_1) = M$. Отсюда следует, что $g^{-1}g$ — тождественное преобразование, то есть $g^{-1}g = e$. Аналогично, $(gg^{-1})(M) = g(g^{-1}(M)) = g(M_2) = M$, т. е. $gg^{-1} = e$.

Докажем теперь равенство (2). Пусть $f_1 = h(fg)$, $f_2 = (hf)g$, $f_3 = hf$. Возьмем произвольную точку M пространства и рассмотрим точку $M_1 = g(M)$. Тогда $f_1(M) = [h(fg)](M) = h[(fg)(M)] = h[f(M_1)] = f_3(M_1)$, $f_2(M) = (hf)(g(M)) = (hf)(M_1) = f_3(M_1)$. Отсюда следует, что преобразования f_1 и f_2 совпадают, т. е. имеет место равенство (2).

Таким образом, *множество D всех движений пространства образует группу*. Эта группа называется *группой движений пространства*.

§ 17. ДВИЖЕНИЯ И НАЛОЖЕНИЯ

1. Движения и наложения

Из определения движения непосредственно следует, что *любое наложение является движением*. Верно и обратное утверждение: любое движение является наложением. Для доказательства этого утверждения предварительно рассмотрим три леммы, первую из которых приводим без доказательства, так как ее доказательство в точности совпадает с доказательством леммы 1 § 33 [7].

Лемма 1. *При движении три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.*

Упорядоченную четверку точек A, B, C, D называют *репером* и обозначают так: (A, B, C, D). Репер называется *ортонормированным*, если $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ и $AB = AC = AD$. Ясно, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости и являются вершинами тетраэдра $ABCD$, грани ABC, ABD и ACD которого — равнобедренные прямоугольные треугольники.

Лемма 2. *При движении ортонормированный репер переходит в ортонормированный репер.*

□ Пусть (A, B, C, D) — ортонормированный репер, а A', B', C', D' — соответственно образы точек A, B, C, D при данном движении. По лемме 1 точки A', B' и C' не лежат на одной прямой, и так как $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, то $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ по трем сторонам. Отсюда следует, что $A'B'C'$ — прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами $A'B' = A'C'$. Аналогично, $A'C'D'$ и $A'B'D'$ — равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами $A'B' = A'D'$ и $A'C' = A'D'$. Следовательно, $A'B' \perp A'C'$, $A'D' \perp A'B'$, $A'D' \perp A'C'$, $A'B' = A'C' = A'D'$ поэтому (A', B', C', D') — ортонормированный репер. ■

Лемма 3. *Если (A, B, C, D) и (A_1, B_1, C_1, D_1) — произвольные реперы, то существует не более одного движения, при котором точки A, B, C, D переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1 и D_1.*

□ Допустим, что утверждение леммы неверно, т. е. существуют различные движения g_1 и g_2, которые точки A, B, C, D переводят соответственно в точки A_1, B_1, C_1, D_1. Тогда существует такая точка M, что точки $M_1 = g_1(M)$ и $M_2 = g_2(M)$ не совпадают. Так как $A_1 = g_1(A)$, $A_1 = g_2(A)$, то $AM = A_1M_1$ и $AM = A_1M_2$, следовательно, $A_1M_1 = A_1M_2$. Аналогично получаем: $B_1M_1 = B_1M_2$, $C_1M_1 = C_1M_2$, $D_1M_1 = D_1M_2$. Отсюда следует, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат в одной плоскости (см. задачу 1 § 11). Это противоречит определению репера. Таким образом, наше предположение неверно и поэтому существует не более одного движения, при котором точки A, B, C, D переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1, D_1. ■

Докажем теперь основную теорему.

Теорема 1. *Любое движение пространства является наложением.*

□ Пусть (A, B, C, D) — произвольный ортонормированный репер, а A', B', C', D' — соответственно образы точек A, B, C, D при данном движении g. По лемме 2 (A', B', C', D') — ортонормированный репер.

Докажем, что существует наложение, при котором репер (A, B, C, D) переходит в репер (A', B', C', D'). Так как $\angle BAC = \angle B'A'C'$, то по аксиоме III_6 существует наложение f такое, что $A' = f(A)$, луч AB переходит в луч $A'B'$, луч AC — в луч $A'C'$, а полупространство с границей ABC, содержащее точку D,— в полупространство с границей $A'B'C'$, содержащее точку D'. Так как $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$, то $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Прямая AD перпендикулярна к плоскости ABC, поэтому прямая $A'D''$, где $D'' = f(D)$, перпендикулярна к плоскости $A'B'C'$ (см. § 11, п. 1). Отсюда следует, что прямые $A'D''$ и $A'D'$ совпадают и что точка D'' лежит на луче $A'D'$. В силу равенства $A'D' = A'D''$ точки D' и D'' совпадают, т. е. $D' = f(D)$.

Наложение f является движением, следовательно, по лемме 3 движения f и g совпадают. Так как f — наложение, то и g — наложение. ■

Мы доказали, что понятия «наложение» и «движение» совпадают, поэтому все свойства наложений, рассмотренные нами выше, имеют место и для движений. В частности, при любом движении отрезок переходит в отрезок (см. п. 1 § 3). Из свойства 3^0 и теоремы 2 § 3 следует, что луч переходит в луч, прямая — в прямую, а плоскость — в плоскость. Отметим также, что при движении сохраняется перпендикулярность двух прямых, прямой и плоскости и перпендикулярность двух плоскостей (см. § 10, § 11 и § 12).

Так как любое движение является наложением, то, учитывая определение равных фигур, данное в § 3, мы заключаем, что *две фигуры равны тогда и только тогда, когда существует движение, при котором одна фигура переходит в другую.*

2. Неподвижные точки, прямые и плоскости движения

Точка пространства называется *неподвижной точкой* движения, если при этом движении она переходит в себя. Прямая называется *неподвижной прямой* движения, если любая ее точка переходит в точку этой же прямой. Частным случаем неподвижной прямой является *прямая неподвижных точек*, все точки которой являются неподвижными. Нетрудно доказать, что если две точки A и B являются неподвижными точками данного движения, то AB — прямая неподвижных точек.

Плоскость называется *неподвижной плоскостью* движения, если при этом движении любая точка плоскости переходит в точку этой же плоскости. Частным случаем неподвижной плоскости является *плоскость неподвижных точек*, все точки которой являются неподвижными. Если, например, g — симметрия относительно плоскости α, то любая прямая плоскости α, а также любая прямая, перпендикулярная к плоскости α, является неподвижной прямой, причем прямые плоскости α — прямые неподвижных точек. Далее, плоскость α, а также любая плоскость, ей перпендикулярная, является неподвижной плоскостью движения g, причем сама плоскость α является плоскостью неподвижных точек.

Так как при любом движении плоскость переходит в плоскость, то если три точки плоскости α, не лежащие на одной прямой, переходят в точки той же плоскости, то, очевидно, α — неподвижная плоскость.

Пусть σ — неподвижная плоскость движения f. Тогда f порождает на плоскости σ преобразование, которое сохраняет расстояния, поэтому является движением на этой плоскости. Таким образом, движение f на каждой неподвижной плоскости порождает один из следующих видов движений: параллельный перенос (в частности, тождественное преобразование), поворот (в частности, центральную симметрию), осевую симметрию, скользящую симметрию. Например, если g — симметрия относительно плоскости α, то на любой плоскости β, перпендикулярной к плоскости α, g порождает осевую симметрию, осью которой является прямая пересечения плоскостей α и β. На самой плоскости α g порождает тождественное преобразование.

Докажем, что любое движение имеет хотя бы одну неподвижную прямую. Для этого сначала докажем две леммы.

Лемма 4. *Если движение имеет неподвижную плоскость, то оно имеет и неподвижную прямую, лежащую в этой плоскости или перпендикулярную к ней.*

□ Пусть σ — неподвижная плоскость движения g. Тогда на плоскости σ порождается движение $\hat{g}_\sigma$. Если $\hat{g}_\sigma$ имеет хотя бы одну неподвижную точку A, то эта же точка является неподвижной точкой движения g. Поэтому прямая l, проходящая через точку A и перпендикулярная к плоскости σ, является неподвижной прямой движения g. Если движение $\hat{g}_\sigma$ не имеет неподвижных точек, то оно имеет хотя бы одну неподвижную прямую (см. [7] § 34, лемма), которая является неподвижной прямой движения g. ■

Лемма 5. *Если при движении некоторая прямая a переходит в параллельную ей прямую a', то такое движение имеет неподвижную прямую.*

□ Рассмотрим какую-нибудь плоскость σ, перпендикулярную к прямым a и a', и покажем, что данное движение g порождает некоторое движение на плоскости σ. Пусть X — произвольная точка плоскости σ, а x — прямая, проходящая через точку X и параллельная прямой a (если X — точка пересечения прямой a с плоскостью σ, то за прямую x примем прямую a). При движении g так же, как и при любом движении, параллельные прямые переходят в параллельные прямые, поэтому $x' \parallel a'$, где $x' = g(x)$. На плоскости σ точке X поставим в соответствие точку X' пересечения прямой x' с плоскостью σ. Мы получаем отображение $X' = f(X)$ плоскости σ, которое является движением, так как при движении g сохраняется расстояние между параллельными прямыми.

Если A — неподвижная точка движения f, то прямая $AB \perp \sigma$ является неподвижной прямой движения g. Если движение f не имеет неподвижных точек, то оно имеет хотя бы одну неподвижную прямую l. В этом случае плоскость $\beta_0 \perp \sigma$ и $l \subset \beta_0$ является неподвижной плоскостью движения g, и по лемме 4 это движение имеет неподвижную прямую. ■

Докажем теперь теорему, которой будем пользоваться в следующем параграфе для классификации движений пространства.

Теорема 2. *Любое движение пространства имеет по крайней мере одну неподвижную прямую.*

□ Если данное движение имеет хотя бы две неподвижные точки A и B, то, очевидно, прямая AB является неподвижной прямой, поэтому рассмотрим два других возможных случая.

а) Данное движение f имеет только одну неподвижную точку O.

Возьмем точку A, отличную от точки O, и рассмотрим точки $A' = f(A)$, $A'' = f(A')$ и $A''' = f(A'')$. Если хотя бы одна из следующих троек точек A, A', A''; A', A'', A'''; O, A, A' или O, A', A'' лежит на одной прямой, то эта прямая является неподвижной прямой движения f. Поэтому докажем теорему в предположении, что ни одна из указанных выше троек точек не лежит на одной прямой. Обозначим через α и β соответственно плоскости $AA'A''$ и $A'A''A'''$. Тогда ясно, что $\beta = f(\alpha)$. Рассмотрим случай, когда плоскости α и β не совпадают, так как в противном случае α — неподвижная плоскость и утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 4. В этом случае плоскости α и β не являются неподвижными, поэтому точка O не может лежать ни в одной из плоскостей α или β (рис. 24).

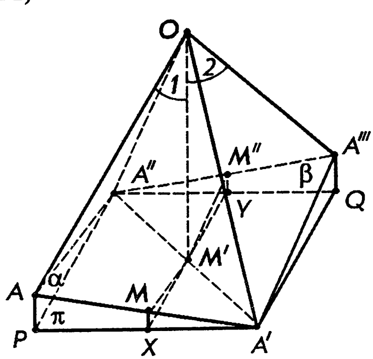


рис. 24

Пусть M, M', M'' — середины отрезков AA', $A'A''$ и $A''A'''$. Докажем, что точки O, M, M', M'' лежат в одной плоскости. Для этого заметим, что при движении f отрезок AA' переходит в отрезок $A'A''$, поэтому $AA' = A'A''$ и $M' = f(M)$. Аналогично, $M'' = f(M')$. Таким образом, $MM' = M'M''$, поэтому $AA'' = 2MM' = = 2M'M'' = A'A'''$. Равнобедренные треугольники $AA'A''$ и $A'A''A'''$ равны по трем сторонам, следовательно, их медианы равны: $AM' = A'''M'$. Отсюда заключаем, что $\Delta AOM' = \Delta A'''OM'$, поэтому $\angle 1 = = \angle 2$, где $\angle 1 = \angle AOM'$, $\angle 2 = \angle M'OA'''$.

Через прямую $A'A''$ проведем плоскость π, перпендикулярную прямой OM'. Такая плоскость существует в силу того, что $OM' \perp A'A''$ (треугольник $OA'A''$ — равнобедренный, поэтому его медиана OM' является высотой). Точки M, M'' лежат по одну сторону от плоскости π, так как углы $MM'O$ и $M''M'O$, как углы при основании равнобедренных треугольников OMM' и $OM'M''$,— острые. Отсюда следует, что точки A и A''' лежат по ту же сторону от плоскости π. С другой стороны, учитывая, что α и β — различные плоскости, читатель убедится в том, что точки A и A''' лежат по разные стороны от плоскости $A'A''O$.

Пусть AP, $A'''Q$, MX и $M''Y$ — перпендикуляры, проведенные к плоскости π. Отрезки AP и QA''' равны, так как они параллельны прямой OM' и их проекции на эту прямую совпадают (проекции точек P и Q совпадают с точкой M', а проекции точек A, A''' также совпадают в силу равенств: $\angle 1 = \angle 2$, $OA = OA'''$). Прямоугольные треугольники PAA' и $QA'''A''$ равны по катету и гипотенузе, следовательно, $PA' = QA''$. Аналогично, $PA'' = QA'$. Учитывая, что точки P и Q лежат по разные стороны от прямой $A'A''$, мы приходим к выводу, что четырехугольник $A'PA''Q$ является параллелограммом. Прямая XY проходит через центр M' этого параллелограмма, т. е. параллельные прямые XM, $M'O$ и YM'' лежат в одной плоскости. Итак, точки O, M, M' и M'' лежат в плоскости OMM', которая является неподвижной плоскостью движения f.

Согласно лемме 4 движение f имеет неподвижную прямую.

б) Данное движение f не имеет неподвижных точек. Рассмотрим некоторую точку A пространства, $A' = f(A)$.

Пусть pf — произведение движения f и параллельного переноса p на ненулевой направленный отрезок $\overline{A'A}$. Тогда $pf(A) = A$, поэтому A — неподвижная точка движения pf. По доказанному движение pf имеет неподвижную прямую, которую обозначим через a: $pf(a) = a$. Следовательно, $f(a) = p^{-1}(a)$, откуда получаем, что при движении f прямая a либо неподвижна, либо переходит в параллельную прямую a'. В первом случае прямая a — искомая прямая. Во втором случае согласно лемме 5 движение f имеет неподвижную прямую. ■

§ 18. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе мы проведем полную классификацию движений пространства в зависимости от того, имеет ли движение неподвижные точки и сколько таких точек.

1. Классификация движений, имеющих неподвижные точки

Сначала рассмотрим случай, когда движение имеет более чем одну неподвижную точку.

а) Движение f имеет четыре неподвижные точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости. При движении f репер (A, B, C, D) переходит в себя. Так как при тождественном преобразовании репер (A, B, C, D) также переходит в себя, то по лемме 3 § 17 движение f является тождественным преобразованием.

б) Движение f имеет три неподвижные точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, но не имеет неподвижных точек, не лежащих в плоскости ABC. Возьмем точку D так, чтобы $AD \perp ABC$, рассмотрим репер (A, B, C, D) и его образ (A, B, C, D'). По предположению точки D и D' не совпадают. Так как $AD \perp AB$, $AD \perp AC$, то $AD' \perp AB$, $AD' \perp AC$ и, кроме того, $AD = AD'$. Отсюда следует, что точки D и D' симметричны относительно плоскости ABC (рис. 25). Так как при симметрии относительно плоскости ABC репер (A, B, C, D) также переходит в репер (A, B, C, D'),

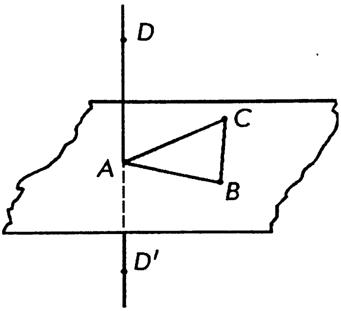


РИС. 25

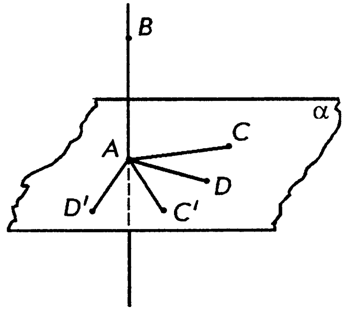


РИС. 26

то по лемме 3 § 17 движение f является симметрией относительно плоскости ABC.

в) Движение f имеет по крайней мере две неподвижные точки A и B и не имеет неподвижных точек, не лежащих на прямой AB.

Рассмотрим плоскость α, проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой AB, и репер (A, B, C, D), где точки C и D лежат в плоскости α (рис. 26). Так как α — неподвижная плоскость движения f, то образы C' и D' точек C и D также лежат в плоскости α. При движении f репер (A, B, C, D) переходит в репер (A, B, C', D'). Движение f порождает в плоскости α некоторое движение, которое имеет только одну неподвижную точку A, поэтому является поворотом плоскости α вокруг точки A на угол CAC'. При повороте пространства вокруг прямой AB на угол CAC', а также при движении f репер (A, B, C, D) переходит в репер (A, B, C', D'), следовательно, по лемме 3 § 17 движение f является поворотом вокруг прямой AB на угол CAC'. В частном случае, когда $\widehat{CAC'} = 180^\circ$, движение f является симметрией относительно прямой AB.

2. Классификация движений, имеющих единственную неподвижную точку

Пусть A — единственная неподвижная точка данного движения f. Неподвижная прямая a, которая существует согласно теореме 2 § 17, проходит через точку A, так как в противном случае основание перпендикуляра, проведенного из точки A к прямой a, также является неподвижной точкой, что невозможно. Если B — некоторая точка прямой a, отличная от точки A, а $B' = f(B)$, то $AB = AB'$, поэтому точки B и B' симметричны относительно точки A (рис. 27).

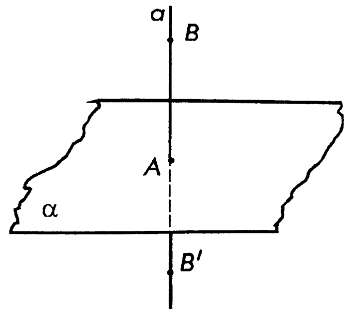


РИС. 27

Рассмотрим симметрию g_1 относительно плоскости α, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a, и движение $g_2 = g_1 f$. Точки A и B являются неподвижными точками движения g_2. Из предыдущего изложения следует, что g_2 — либо тождественное преобразование, либо симметрия относительно плоскости, либо поворот вокруг прямой AB. Так как движение f имеет только одну неподвижную точку, то первые два случая невозможны. В самом деле, если, например, предположить, что g_2 — симметрия относительно некоторой плоскости, то из равенства $g_2 = g_1 f$ следует, что $f = g_1 g_2$, т. е. f — поворот вокруг прямой (§ 16, пример 4) и, следовательно, имеет более чем одну неподвижную точку. Итак, g_2 — поворот вокруг прямой a. Движение $f = g_1 g_2$ называется *поворотным отражением*. Прямая a, угол φ, плоскость α и точка A называются соответственно *осью, углом, плоскостью* и *центром* поворотного отражения f.

Нетрудно доказать, что в определении поворотного отражения несущественен порядок, в котором берутся g_1 и g_2, т. е. $f = g_1 g_2 = g_2 g_1$.

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что поворотное отражение на угол $\varphi = 180^\circ$ есть центральная симметрия относительно центра поворотного отражения.

3. Классификация движений, не имеющих неподвижных точек

Пусть f — движение, не имеющее ни одной неподвижной точки. Согласно теореме 2 § 17 данное движение имеет неподвижную прямую, которую обозначим через a. Пусть $A \in a$, $A' = f(A)$, $A'' = f(A')$. Ясно, что $A' \in a$, $A'' \in a$ и точки A и A', а также A' и A'' не совпадают. Точки A и A'' также не совпадают, так как в противном случае середина отрезка AA' является неподвижной точкой движения f. Так как $AA' = A'A''$, то точка A' — середина отрезка AA''. Следовательно, при параллельном переносе g_1 на направленный отрезок $\overline{A'A}$ имеем: $g_1(A') = A$, $g_1(A'') = A'$.

Рассмотрим движение $g_2 = g_1 f$. Очевидно $g_2(A) = A$, $g_2(A') = A'$, т. е. A и A' — неподвижные точки движения g_2. Согласно п. 1 возможны три случая:

а) g_2 — тождественное преобразование. Тогда из равенства $g_2 = g_1 f$ следует, что $f = g_1^{-1} g_2 = g_1^{-1}$, т. е. f — параллельный перенос на направленный отрезок $\overline{AA'}$;

б) g_2 — симметрия относительно плоскости, в которой лежат точки A и A'. В этом случае $f = g_1^{-1} g_2$, т. е. f является скользящим отражением (§ 16, пример 5);

в) g_2 — поворот вокруг прямой AA'. Следовательно, $f = g_1^{-1} g_2$ является произведением поворота вокруг прямой AA' на некоторый угол и параллельного переноса g_1^{-1} на направленный отрезок $\overline{AA'}$. Такое движение называется *винтовым движением*. Прямая AA', угол поворота и направленный отрезок $\overline{AA'}$ называются соответственно *осью, углом* и *направленным отрезком* винтового движения.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Любое движение (наложение) пространства принадлежит к одному из следующих шести видов:*

1. *Параллельный перенос (в частности, тождественное преобразование).*
2. *Поворот вокруг прямой (в частности, симметрия относительно прямой).*
3. *Винтовое движение.*
4. *Симметрия относительно плоскости.*
5. *Поворотное отражение (в частности, симметрия относительно точки).*
6. *Скользящее отражение.*

§ 19. ГОМОТЕТИЯ И ПОДОБИЕ

1. Преобразование подобия

Преобразование пространства называется *преобразованием подобия* (или просто подобием), если существует такое число $k > 0$, что для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполняется равенство $A'B' = kAB$. Число k называется *коэффициентом подобия.*

Так же как и на плоскости, при $k = 1$ подобие сохраняет расстояния, т. е. является движением. Следовательно, движение — частный случай подобия. В п. 2 мы покажем, что существуют подобия, отличные от движений.

Пусть f_1 и f_2 — преобразования подобия с коэффициентами k_1 и k_2. Точно так же, как и в планиметрии, можно доказать, что произведение f_2f_1 является подобием с коэффициентом k_1k_2 (см. теорема 1 § 40 [7]). Итак, *произведение двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие с коэффициентом k_1k_2.*

2. Гомотетия

Рассмотрим произвольную точку O пространства и действительное число $m \neq 0$. Каждой точке M пространства, не совпадающей с O, поставим в соответствие точку M' так, чтобы $OM' = |m| \cdot OM$ и точка M' принадлежала лучу OM, если $m > 0$, и точка M' принадлежала продолжению луча OM, если $m < 0$. Будем считать, что точке O соответствует сама точка O. Такое отображение, как легко видеть, является преобразованием пространства и называется *гомотетией.* Точка O называется *центром гомотетии,* а число m — *коэффициентом гомотетии.*

Так же как и на плоскости, гомотетия является частным случаем подобия. Для доказательства этого утверждения предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *При гомотетии f с центром O и коэффициентом m плоскость, проходящая через точку O, переходит в себя, и на этой плоскости гомотетия f порождает гомотетию с центром O и коэффициентом m.*

□ Пусть плоскость σ проходит через точку O. Если M — произвольная точка плоскости σ, отличная от точки O, а M' — образ этой точки, то, по определению гомотетии, точка M' лежит на прямой OM, поэтому $M' \in \sigma$. Обратно, если точка M' — любая точка плоскости σ, а M — прообраз этой точки, то точка M лежит на прямой OM', поэтому $M \in \sigma$. Таким образом, при гомотетии f плоскость σ переходит в себя.

Отсюда следует, что гомотетия f порождает на плоскости σ некоторое преобразование, которое, по определению, является гомотетией плоскости σ с центром O и коэффициентом m. ■

Пользуясь этой леммой, легко доказать, что *любая гомотетия f с коэффициентом m является преобразованием подобия с коэффициентом $k = |m|$*. В самом деле, пусть A и B — две произвольные точки пространства, а $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

Рассмотрим плоскость σ, в которой лежат точки A, B и O. В этой плоскости гомотетия f порождает некоторую гомотетию, которая, как известно, является преобразованием подобия плоскости с коэффициентом $k = |m|$ (см. [7] § 40, п. 1), следовательно, $A'B' = kAB$.

Таким образом, гомотетия с коэффициентом m, если $|m| \neq 1$, является преобразованием подобия, отличным от движения.

Пользуясь предыдущей леммой, легко доказать, что многие свойства гомотетии, известные из курса планиметрии, имеют место и для гомотетии пространства. Рассмотрим основные из них.

1°. *При гомотетии отрезок переходит в отрезок; прямая, проходящая через центр гомотетии, переходит в себя, а прямая, не проходящая через центр,— в параллельную ей прямую.*

□ Пусть f — данная гомотетия с центром O и коэффициентом m. Рассмотрим две произвольные точки A и B и их образы $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. В плоскости σ, проходящей через точки O, A и B, гомотетия f порождает гомотетию $\hat{f}_\sigma$ этой плоскости, поэтому $A' = \hat{f}_\sigma(A)$, $B' = \hat{f}_\sigma(B)$. Так как $\hat{f}_\sigma$ на плоскости σ есть подобие, то образом отрезка AB является отрезок $A'B'$, образом прямой AB — прямая $A'B'$. При этом, если точка O лежит на прямой AB, то прямые AB и $A'B'$ совпадают, а если O не лежит на этой прямой, то $AB \parallel A'B'$. ■

2°. *При гомотетии с коэффициентом m луч переходит в сонаправленный луч, если $m > 0$, и в противоположно направленный луч, если $m < 0$.*

□ Пусть f — гомотетия с центром O и коэффициентом m, AB — данный луч, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. В плоскости σ, проходящей через точки O, A и B, гомотетия f порождает гомотетию $\hat{f}_\sigma$, поэтому $A' = \hat{f}_\sigma(A)$, $B' = \hat{f}_\sigma(B)$. Так как $\hat{f}_\sigma$ на плоскости σ есть подобие, то при этом подобии луч AB переходит в луч $A'B'$ (см. [7] § 40, свойство 3^0).

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что если $m > 0$, то лучи AB и $A'B'$ сонаправлены, а если $m < 0$, то они противоположно направлены. ■

Сформулируем еще одно свойство, доказательство которого предоставляем читателю.

3^0. *При гомотетии плоскость, не проходящая через центр гомотетии, переходит в параллельную ей плоскость.*

3. Свойства подобия

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 1. *Любое преобразование подобия f с коэффициентом k можно представить в виде $f = gh$, где h — гомотетия с коэффициентом k и центром в произвольной точке M_0, а g — движение.*

□ Возьмем произвольную точку M_0 пространства и рассмотрим гомотетию h с центром M_0 и коэффициентом k. Преобразование h^{-1} является гомотетией с центром M_0 и коэффициентом $\frac{1}{k}$, поэтому (см. п. 1) преобразование $g = fh^{-1}$ является подобием с коэффициентом $k' = \frac{1}{k} \cdot k = 1$, т. е. движением.

Из предыдущего равенства получаем: $gh = (fh^{-1})h = f(h^{-1}h) = f$, т. е. $f = gh$. ■

Пользуясь этой теоремой, принимая во внимание свойства 1^0, 2^0 и 3^0 п. 2, мы приходим к следующему выводу: при любом подобии отрезок переходит в отрезок, прямая — в прямую, плоскость — в плоскость. Далее, луч переходит в луч, полуплоскость — в полуплоскость. Точно так же, как и в планиметрии, доказывается, что при подобии угол переходит в равный ему угол (см. [7] § 40, свойство 4^0). Отсюда следует, что при подобии многоугольник переходит в одноименный многоугольник, выпуклый многоугольник — в выпуклый многоугольник, углы которого соответственно равны углам исходного многоугольника.

Отметим, наконец, что при подобии перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые, прямая и перпендикулярная к ней плоскость переходят в прямую и перпендикулярную к ней плоскость, перпендикулярные плоскости переходят в перпендикулярные плоскости.

4. Подобие фигур

Будем говорить, что *фигура F подобна фигуре F'*, если существует такое преобразование подобия, при котором фигура F переходит в фигуру F'. Если фигура F подобна фигуре F', то пишут так: $F \sim F'$.

Докажем, что *отношение подобия фигур является отношением эквивалентности*, т. е. выполняются следующие условия: а) для любой фигуры F: $F \sim F$; б) если $F \sim F'$, то $F' \sim F$; в) если $F \sim F'$, $F' \sim F''$, то $F \sim F''$.

а) Тождественное преобразование является подобием с коэффициентом $k = 1$, а при тождественном преобразовании фигура F переходит в себя, поэтому $F \sim F$.

б) Так как $F \sim F'$, то существует преобразование подобия f, при котором фигура F переходит в фигуру F'. Преобразование f^{-1}, очевидно, является подобием, при котором фигура F' переходит в фигуру F, следовательно, $F' \sim F$.

в) Так как $F \sim F'$ и $F' \sim F''$, то существуют подобия f_1 и f_2 такие, что $F' = f_1(F)$, $F'' = f_2(F')$. Преобразование f_2f_1 является подобием (см. п. 1), причем $f_2f_1(F) = f_2(f_1(F)) = f_2(F') = F''$. Следовательно, $F \sim F''$.

Рассмотрим более подробно подобие треугольников. Согласно общему определению $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если существует подобие f, при котором ΔABC переходит в $\Delta A_1B_1C_1$. При этом, очевидно, вершины треугольника ABC переходят в вершины треугольника $A_1B_1C_1$. Не нарушая общности, можно предположить, что $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$, поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1, \\ &\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Таким образом, если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то имеют место равенства (1). Признаки подобия треугольников, известные нам из курса планиметрии (см. [7] § 38, п. 2), имеют место и для треугольников, расположенных в пространстве произвольным образом. Докажем, например, первый признак подобия треугольников.

Теорема 2. *Если в треугольниках* ABC *и* $A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, *то* $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

□ Рассмотрим какое-нибудь подобие f с коэффициентом $k = \frac{A_1B_1}{AB}$. Пусть $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Точки A', B', C' не лежат на одной прямой, поэтому $A'B'C'$ — треугольник, который является образом треугольника ABC. Ясно, что $\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$, $A'B' = kAB$. Поэтому $\angle A' = \angle A_1$, $\angle B' = \angle B_1$, $A'B' = \frac{A_1B_1}{AB} \cdot AB = A_1B_1$. Отсюда следует, что $\Delta A'B'C' = \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку равенства треугольников. Следовательно, существует движение (наложение) g такое, что треугольник $A'B'C'$ переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Тогда при подобии $f_1 = gf$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, т. е. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. ■

Аналогично доказываются второй и третий признаки подобия треугольников.

Замечание. Из предыдущего изложения, учитывая доказанную теорему, мы заключаем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны тогда и только тогда, когда выполняются равенства (1). Таким образом, общее определение подобия фигур, применительно к треугольникам, полностью согласуется с определением подобия треугольников в школьных курсах геометрии.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV

ДВИЖЕНИЯ

131. Даны две параллельные плоскости α и β и прямая l, пересекающая эти плоскости. Доказать, что существует единственный отрезок, перпендикулярный к плоскости β, концы которого лежат соответственно в плоскости α и на прямой l, а его середина — в плоскости β.

132. Даны плоскость α и две точки A и B, лежащие по одну сторону от нее. Доказать, что существует единственная точка M_0 в плоскости α такая, что для

4–6509

любой точки M плоскости α, отличной от точки M_0, $AM_0 + BM_0 < AM + BM$.

133. Даны две точки P и Q, лежащие в плоскости α, и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой плоскости. Доказать, что существует ломаная $AKLB$ наименьшей длины такая, что $\overline{KL} = \overline{PQ}$ и точки K и L лежат в плоскости α.

134. Даны две точки A и B, лежащие по одну сторону от плоскости α. Доказать, что существует ломаная $AKLB$ наименьшей длины такая, что отрезок KL равен данному отрезку PQ и точки K и L лежат в плоскости α.

135. Доказать, что движение сохраняет: а) угол между прямой и плоскостью: б) угол между двумя плоскостями; в) перпендикулярность двух прямых; г) перпендикулярность прямой и плоскости; д) перпендикулярность двух плоскостей.

136. Даны два тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Доказать, что существует не более одного движения, при котором точки A, B, C и D переходят соответственно в точки A', B', C' и D'.

137. Даны три луча OA, OB и OC, не лежащие в одной плоскости, и три луча $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$, также не лежащие в одной плоскости, причем $\angle AOB = \angle A'O'B'$, $\angle COA = \angle C'O'A'$, $\angle BOC = \angle B'O'C'$. Доказать, что существует единственное движение, переводящее лучи OA, OB и OC соответственно в лучи $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$.

138. Прямые OA, OB и OC, не лежащие в одной плоскости, являются неподвижными прямыми движения, но ни одна из них не является прямой неподвижных точек. Доказать, что это движение является симметрией относительно точки O.

139. Доказать, что параллельный перенос пространства является движением.

140. Дано поворотное отражение $f = g_2g_1$ с осью a, углом φ, плоскостью α и центром O. Здесь g_1 — поворот вокруг прямой a на угол φ, а g_2 — симметрия относительно плоскости α. Доказать, что: а) если $\varphi = 180^\circ$, то f есть симметрия относительно точки O; б) $g_2g_1 = g_1g_2$.

141. Даны две точки A и B. В движении f точка A

4–2

переходит в точку B, а точка B — в точку A. Доказать, что движение f является либо симметрией относительно плоскости, либо симметрией относительно прямой, либо симметрией относительно точки.

142. Доказать, что движение, отличное от тождественного преобразования, совпадает с обратным ему движением тогда и только тогда, когда данное движение является либо отражением от точки, либо отражением от прямой, либо отражением от плоскости.

143. Доказать, что произведение симметрий относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей есть симметрия относительно точки пересечения этих трех плоскостей.

144. Доказать, что если две точки A и B являются неподвижными точками данного движения, то AB — прямая неподвижных точек.

145. Доказать, что если движение имеет хотя бы одну неподвижную точку, то на любой его неподвижной прямой или неподвижной плоскости имеется хотя бы одна неподвижная точка.

146. Указать все неподвижные плоскости и прямые: а) отражения от плоскости α; б) отражения от прямой a; в) отражения от точки O; г) параллельного переноса на ненулевой направленный отрезок $\overline{AB}$.

147. Указать все неподвижные плоскости и прямые: а) поворота вокруг прямой a на угол $\varphi \neq 180°$; б) винтового движения, заданного осью a, углом φ и направленным отрезком $\overline{AB}$; в) скользящего отражения, заданного плоскостью α и направленным отрезком $\overline{AB}$; г) поворотного отражения, заданного осью a, плоскостью α и углом $\varphi \neq 180°$.

148. Определить вид движения, обратного: а) параллельному переносу на направленный отрезок $\overline{AB}$; б) поворота вокруг прямой a на угол φ; в) винтового движения, заданного осью a, углом φ и направленным отрезком $\overline{AB}$; г) отражения от плоскости α; д) скользящего отражения, заданного плоскостью α и направленным отрезком $\overline{AB}$; е) поворотного отражения, заданного осью a, плоскостью α и углом φ.

149. Вершины выпуклого четырехугольника $ABCD$ переходят при движении в точки A', B', C' и D' соответственно. Доказать, что $A'B'C'D'$ — выпуклый четырехугольник, который является образом четырехугольника $ABCD$. В частности, если $ABCD$ — параллелограмм, то $A'B'C'D'$ — параллелограмм.

150. Доказать, что любые два тетраэдра, имеющие соответственно равные ребра, равны. В частности, два правильных тетраэдра, имеющие равные ребра, равны.

151. Доказать, что два прямоугольных параллелепипеда равны, если они имеют соответственно равные измерения.

152. Через точку M на ребре AD тетраэдра $DABC$ и середины ребер AB и DC проведена плоскость, пересекающая ребро BC в точке N. Доказать, что отрезки AM и BN равны.

153. В правильном тетраэдре $DABC$ точки M, N, P, Q — соответственно середины ребер AB, CD, AD, BC. На ребре AD отложены равные отрезки AE и DE_1, а на ребре BC — равные отрезки BF и CF_1. Плоскость MFE пересекает ребро DC в точке N_1, а плоскость NF_1E_1 — ребро AB в точке M_1. Доказать, что $AM_1 = DN_1$.

154. Через биссектрису угла проведена плоскость, отличная от плоскости угла. Доказать, что стороны угла образуют с ней равные углы.

155. Две плоскости α и β и прямая c имеют только одну общую точку. Доказать, что если прямая c не перпендикулярна плоскостям α и β, то существуют прямые a и b, лежащие соответственно в плоскостях α и β, такие, что прямая c содержит биссектрисы двух вертикальных углов, образованных прямыми a и b.

156. Даны две симметрии g_1 и g_2 относительно взаимно перпендикулярных плоскостей α_1 и α_2 соответственно. Доказать, что $g_1g_2 = g_2g_1$ и $g = g_1g_2$ — симметрия относительно прямой, по которой пересекаются плоскости α_1 и α_2.

157. Доказать, что произведение симметрий относительно двух данных пересекающихся прямых есть поворот вокруг оси, проходящей через точку пересечения данных прямых перпендикулярно к плоскости, в которой они лежат.

158. Даны две пересекающиеся плоскости и точка O, не лежащая на этих плоскостях. Доказать, что существует единственный отрезок с концами на данных плоскостях, середина которого совпадает с точкой O и который перпендикулярен прямой, по которой пересекаются плоскости.

159. Даны плоскость, пересекающая ее прямая и точка, не лежащая на них. Доказать, что существует один и только один отрезок, концы которого лежат на данной прямой и данной плоскости, а серединой является данная точка.

160. Даны плоскость α, пересекающая ее прямая a и точка O, расположенные так, что если прямая, содержащая перпендикуляр OH к плоскости α, пересекает прямую a в некоторой точке M, то $OM \neq OH$. Доказать, что существует единственный прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грань $ABCD$ которого является квадратом, лежащим в плоскости α, точка C_1 лежит на данной прямой, а середина диагонали AC_1 совпадает с точкой O.

161. Из центров трех граней вне данного правильного тетраэдра проведены равные отрезки, перпендикулярные к соответствующим граням. Доказать, что их концы, не лежащие в гранях тетраэдра, являются вершинами правильного треугольника, плоскость которого параллельна плоскости четвертой грани.

162. При данном движении, отличном от тождественного преобразования, каждая прямая и ее образ лежат в одной плоскости. Доказать, что данное движение есть: а) параллельный перенос, если оно не имеет неподвижных точек; б) симметрия относительно точки или плоскости, если оно имеет неподвижные точки.

163. Доказать, что движение является параллельным переносом или центральной симметрией, если выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) каждая прямая и ее образ либо параллельны, либо совпадают; б) каждая плоскость и ее образ либо параллельны, либо совпадают.

164. Доказать, что движение, переводящее каждый луч в сонаправленный луч, есть параллельный перенос, а каждый луч в противоположно направленный луч — симметрия относительно точки.

165. При гомотетии с коэффициентом m луч AB переходит в луч $A'B'$. Доказать, что: а) если $m > 0$, то лучи AB и $A'B'$ сонаправлены; б) если $m < 0$, то лучи AB и $A'B'$ противоположно направлены.

166. Доказать, что при гомотетии плоскость, не проходящая через центр гомотетии, переходит в параллельную ей плоскость.

167. Доказать, что при подобии: а) сохраняется отношение «лежать между» и простое отношение трех точек; б) если точки A и B переходят соответственно в точки A' и B', то отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$.

168. Доказать, что при подобии: а) три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой; б) угол переходит в равный ему угол.

169. Даны три луча OA, OB и OC, не лежащие в одной плоскости, и три луча $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$, также не лежащие в одной плоскости, причем $\angle AOB = \angle A'O'B'$, $\angle BOC = \angle B'O'C'$, $\angle COA = \angle C'O'A'$. Доказать, что существует единственное подобие с данным коэффициентом k, при котором лучи OA, OB и OC переходят соответственно в лучи $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$.

170. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и две соответственно параллельные им скрещивающиеся прямые a' и b'. Доказать, что существует подобие, при котором прямые a и b переходят соответственно в прямые a' и b'.

171. Доказать, что подобие с коэффициентом k, переводящее каждый луч в сонаправленный луч, либо каждый луч в противоположно направленный луч, является либо гомотетией с коэффициентом k или $-k$, либо параллельным переносом.

172. Доказать, что произведение n гомотетий с коэффициентами k_1, k_2, ..., k_n, где $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n \neq 1$, $n > 1$, есть гомотетия f, коэффициент которой равен $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$. При этом, если центры данных гомотетий лежат на одной прямой (в одной плоскости), то центр гомотетии f лежит на этой прямой (плоскости).

173. При подобии вершины треугольника ABC переходят соответственно в точки A', B' и C'. Доказать, что при этом подобии треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C'$.

174. Доказать что, если при подобии вершины выпуклого четырехугольника $ABCD$ переходят в точки A', B', C' и D', то $A'B'C'D'$ — выпуклый четырехугольник и при данном подобии четырехугольник $ABCD$ переходит в четырехугольник $A'B'C'D'$. В частности, если $ABCD$ параллелограмм, то $A'B'C'D'$ — параллелограмм.

175. Две параллельные плоскости, не проходящие через точку O, пересекают каждую из трех прямых, проходящих через точку O и не лежащих в одной плоскости. Доказать, что точка O лежит на прямой, проходящей через точки пересечения медиан образовавшихся треугольников.

176. Доказать, что любые два тетраэдра, ребра которых соответственно пропорциональны, подобны. В частности, любые два правильных тетраэдра подобны.

177. Доказать, что два прямоугольных параллелепипеда подобны, если измерения одного из них пропорциональны измерениям другого.

178. Даны плоскость, пересекающая ее прямая и точка, не лежащая на них. Доказать, что существует один и только один отрезок, концы которого лежат соответственно на данной прямой и данной плоскости, который делится данной точкой в отношении $\lambda > 0$.

179. Даны преобразования подобия f_1 и f_2 с коэффициентами k_1 и k_2. Доказать, что $f_2 f_1$ — подобие с коэффициентом $k_1 k_2$.

180. Доказать, что два треугольника подобны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны; б) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

181. Вершины A и B трапеции $ABCD$ лежат в плоскости α, а расстояние от прямой, содержащей основание CD, до плоскости α равно 5 см. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до плоскости α, если $AB : CD = 7 : 3$.

182. В тетраэдре $DABC$ грань ABC — правильный треугольник со стороной a, основание перпендикуляра DH, равного h, к плоскости ABC совпадает с центром этого треугольника. Доказать, что: а) $DA = DB = DC$, и найти длины этих ребер; б) расстояния от середин ребер AB, BC, CD до прямых, содержащих противоположные ребра, равны и найти эти расстояния.

183. В тетраэдре $DABC$ $AB = BC = CA = a$; $DA = DB = DC = b$. Через середину перпендикуляра DH, проведенного к плоскости ABC, проходит плоскость, параллельная плоскости DAB, пересекающая тетраэдр по треугольнику. Найти стороны этого треугольника.

184. Внутри грани ABC тетраэдра $DABC$ дана точка M. Через точки A, B и C проведены прямые, параллельные прямой DM и пересекающие плоскости DBC, DCA и DAB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что $\frac{1}{DM} = \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1}$.

185. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы DAB, BAC, CAD — прямые. Доказать, что: а) проекция A_1 вершины A на плоскость BCD есть точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника BCD; б) площадь грани ABC есть среднее пропорциональное между площадями треугольников A_1BC и DBC.

186. Точка M — середина ребра BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямой A_1M и плоскостью ABC_1.

Глава V

ТРЕХГРАННЫЙ УГОЛ. ЭЛЕМЕНТЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 20. МНОГОГРАННЫЙ УГОЛ

1. Двугранный угол

Двугранным углом называется фигура, образованная данной прямой и двумя полуплоскостями, не лежащими в одной плоскости, общей границей которых является данная прямая. Указанные полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, а их общая граница — его *ребром*. Двугранный угол с ребром CD, грани которого проходят через точки A и B, будем обозначать так: $A \cdot CD \cdot B$.

С каждым двугранным углом связаны два полупространства, каждому из которых принадлежит одна грань двугранного угла, а граница содержит вторую его грань. Пересечение этих полупространств называется *внутренней областью* двугранного угла. Точки этой области называются *внутренними точками* двугранного угла.

Легко доказать, что если две точки A и B принадлежат разным граням двугранного угла, то любая точка, лежащая на отрезке AB, принадлежит внутренней области этого угла. Далее, пусть M — внутренняя точка двугранного угла с ребром a. Тогда все точки полуплоскости с границей a, содержащей точку M, являются внутренними точками этого угла.

Если через произвольную точку ребра двугранного угла провести плоскость, перпендикулярную к его ребру, то в пересечении этой плоскости с двугранным углом образуется угол, который называется *линейным углом двугранного угла*. Ясно, что двугранный угол имеет бесчисленное множество линейных углов. Докажем, что *все линейные углы двугранного угла равны*. В самом деле, пусть плоскости γ_1 и γ_2, перпендикулярные к ребру a двугранного угла, пересекая его, образуют линейные углы $B_1A_1C_1$ и $B_2A_2C_2$ (рис. 28).

По свойству 2^0 § 11 плоскости γ_1 и γ_2 параллельны, поэтому прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны (свойство 3^0 § 8). Учитывая, что лучи A_1B_1 и A_2B_2 лежат в одной полуплоскости с границей a, получаем, что $A_1B_1 \uparrow\uparrow A_2B_2$. Аналогично, $A_1C_1 \uparrow\uparrow A_2C_2$, поэтому углы $B_1A_1C_1$ и $B_2A_2C_2$ равны как углы с соответственно сонаправленными сторонами.

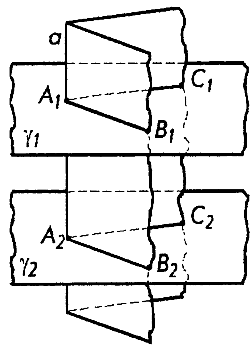


РИС. 28

Читателю нетрудно убедиться в том, что при наложении двугранный угол переходит в двугранный угол и каждый его линейный угол переходит в линейный угол его образа.

Мерой двугранного угла назовем меру любого его линейного угла. Мера φ двугранного угла заключена в пределах: $0 < \varphi < 180$. Двугранный угол назовем *прямым*, если его линейные углы — прямые.

Теорема 1. *Два двугранных угла равны тогда и только тогда, когда равны их линейные углы.*

□ Пусть данные двугранные углы F и F' равны. Тогда существует наложение f такое, что $F' = f(F)$. При этом каждый линейный угол двугранного угла F переходит в некоторый линейный угол двугранного угла F'. Отсюда следует, что линейные углы двугранных углов F и F' равны.

Докажем обратное утверждение. Пусть у двугранных углов F и F' с ребрами a и a' линейные углы BAC и $B'A'C'$ равны. Докажем, что $F = F'$, т. е. существует такое наложение f, что $F' = f(F)$. Обозначим через P одно из полупространств с границей ABC, а через P' — одно из полупространств с границей $A'B'C'$. По аксиоме III_6 существует наложение f такое, что луч AB переходит в луч $A'B'$, луч AC — в луч $A'C'$ и $P' = f(P)$. Отсюда следует, что $\alpha' = f(\alpha)$, где α и α' плоскости углов ABC и $A'B'C'$.

При наложении сохраняется перпендикулярность прямых и плоскостей, поэтому, учитывая, что $A' = f(A)$, $\alpha' = f(\alpha)$, $a \perp \alpha$, $a' \perp \alpha'$, мы приходим к выводу, что $a' = f(a)$. Но при наложении f луч AB переходит в луч $A'B'$, а луч AC — в луч $A'C'$, поэтому грани двугранного угла F переходят соответственно в грани двугранного угла F'. Таким образом, $F' = f(F)$, т. е. $F = F'$. ■

Следствие. *Два двугранных угла равны тогда и только тогда, когда их меры равны.*

Двугранный угол с гранями λ и μ иногда обозначается через $\angle\, \lambda\mu$ или $\angle\, \mu\lambda$. В соответствии с этим равенство двугранных углов $\lambda_1 \mu_1$ и $\lambda_2 \mu_2$ обозначается так: $\angle\, \lambda_1 \mu_1 = \angle\, \lambda_2 \mu_2$.

Биссектральной полуплоскостью двугранного угла $\lambda\mu$ называется полуплоскость σ с границей, совпадающей с ребром двугранного угла, все точки которой лежат внутри этого угла и $\angle\, \lambda\sigma = \angle\, \sigma\mu$. Нетрудно доказать, что каждый двугранный угол имеет одну и только одну биссектральную полуплоскость.

Имеет место следующая теорема о биссектральной полуплоскости двугранного угла, аналогичная теореме о биссектрисе угла.

Теорема 2. *Биссектральная полуплоскость двугранного угла есть фигура, состоящая из множества всех внутренних точек двугранного угла, каждая из которых равноудалена от плоскостей, содержащих грани этого угла.*

Доказательство этой теоремы предоставляем читателю.

2. Многогранный угол

Многогранным углом называется фигура, образованная конечной системой неразвернутых углов[1] с общей вершиной, называемых *гранями*, расположенных в пространстве так, что выполняются следующие условия: а) любые две грани либо не имеют ни одной общей точки, кроме общей вершины, либо имеют одну и только одну общую сторону (*смежные грани*); б) каждая сторона любой грани является стороной двух и только двух граней, которые не лежат в одной плоскости; в) для любых двух несмежных граней γ_1 и γ_k можно подобрать такие грани $\gamma_2, \gamma_3, \dots$,

[1] Напомним, что в стереометрии неразвернутым углом называют фигуру, состоящую из угла, как пары лучей и их общего начала, и внутренней области этого угла.

γ_{k-1}, что в системе $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k$ грани γ_i и γ_{i+1} $(i = 1, \dots, k-1)$ являются смежными.

Общая вершина всех граней многогранного угла называется его *вершиной*, сами грани — его *плоскими углами*, а стороны граней называются его *ребрами*. Двугранный угол, ребро которого содержит одно из ребер многогранного угла, а грани содержат его смежные грани, называется *двугранным углом многогранного угла*. Многогранный угол с вершиной S и гранями $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_{n-1}SA_n, A_nSA_1$ будем обозначать так: $SA_1A_2 \dots A_n$. Такой многогранный угол называется *n-гранным углом*. Он имеет n ребер и n граней. Ясно, что многогранный угол имеет не менее трех граней, поэтому наиболее простым многогранным углом является трехгранный угол (рис. 29а). На рис. 29б изображен шестигранный угол $SA_1A_2 \dots A_6$, гранями его являются плоские углы $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_6SA_1$.

Многогранный угол называется *выпуклым*, если все его грани лежат в одном замкнутом полупространстве, границей которого является плоскость любой грани. Пересечение всех указанных полупространств без их границ называется *внутренней областью* выпуклого многогранного угла.

Фигура, являющаяся объединением выпуклого многогранного угла F и его внутренней области, также называется выпуклым многогранным углом. Его

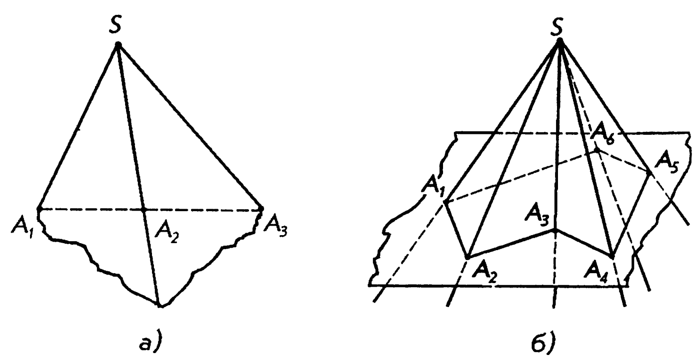


РИС. 29

мы будем обозначать через $\overline{F}$. Очевидно, выпуклый многогранный угол $\overline{F}$ является выпуклой фигурой.

Нетрудно видеть, что любой трехгранный угол является выпуклым (см. рис. 29а). Однако n-гранный угол при $n > 3$ может быть как выпуклым, так и невыпуклым. Например, на рисунке 29б изображен невыпуклый шестигранный угол. Можно доказать, что многогранный угол является выпуклым тогда и только тогда, когда любое его сечение плоскостью, которая пересекает все его ребра, является выпуклым многоугольником.

§ 21. ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ И СИНУСОВ ДЛЯ ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ

1. Теорема косинусов для трехгранного угла

Теорема 1. *Если α, β и γ — меры плоских углов трехгранного угла, а $\hat{C}$ — мера двугранного угла, противолежащего плоскому углу с мерой γ, то*

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\hat{C}. \qquad (1)$$

□ Пусть S — вершина данного трехгранного угла F, а h, k, l — его ребра, причем $\alpha = \widehat{kl}$, $\beta = \widehat{hl}$, $\gamma = \widehat{hk}$. Доказательство теоремы проведем для двух возможных случаев в зависимости от значений α и β: а) $\alpha \neq 90^\circ$, $\beta \neq 90^\circ$; б) хотя бы одно из значений α или β равно 90°.

а) Через произвольную точку C ребра l в плоскостях граней hl и kl проведем прямые, перпендикулярные к ребру l, и обозначим через A и B точки пересечения этих прямых с прямыми, на которых лежат лучи h и k. Сначала предположим, что $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$. Тогда точка A лежит на луче h, а B — на луче k и $\widehat{ACB} = \hat{C}$ (рис. 30а). Применив теорему косинусов к треугольникам CAB и SAB, получим:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\hat{C},$$

$$AB^2 = AS^2 + BS^2 - 2AS \cdot BS \cdot \cos\gamma.$$

Приравняв правые части и разделив на CS^2, будем иметь:

$$\frac{AC^2}{CS^2} + \frac{BC^2}{CS^2} - 2\frac{AC}{CS} \cdot \frac{BC}{CS} \cos \hat{C} = \frac{AS^2}{CS^2} + \frac{BS^2}{CS^2} - 2\frac{AS}{CS} \cdot \frac{BS}{CS} \cos \gamma,$$

или $\quad \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha \cos \hat{C} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - 2\frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}.$

Отсюда, учитывая, что $\frac{1}{\cos^2 \beta} - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = 1$, $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$, после элементарных преобразований получаем равенство (1).

Вывод формулы (1), по существу, не изменится, если $\alpha > 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ или $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ ($\alpha > 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$). Рассуждая аналогично, вместо равенства (1) получаем равенство:

$$\cos \gamma' = \cos \alpha' \cdot \cos \beta' + \sin \alpha' \cdot \sin \beta' \cdot \cos \hat{C}, \quad (2)$$

В случае $\alpha > 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ точки A и B лежат на продолжениях лучей h и k (рис. 30б), поэтому

$$\gamma' = \gamma,\ \alpha' = 180^\circ - \alpha,\ \beta' = 180^\circ - \beta,\ \hat{C}' = \hat{C}.$$

Подставив эти значения в равенство (2), получаем равенство (1).

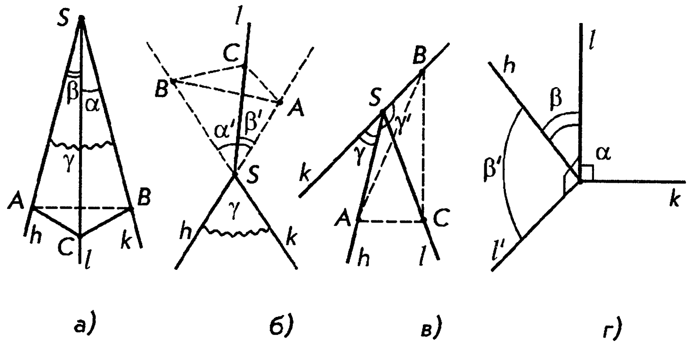
В случае $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ точка A лежит на луче h, а точка B — на продолжении луча k (рис. 30в), поэтому в равенстве (2) $\gamma' = 180^\circ - \gamma$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = 180^\circ - \beta$, $\hat{C}' = 180^\circ - \hat{C}$. Из равенства (2) снова получаем равенство (1).

б) Если $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, то $\angle\, hk$ является линейным углом двугранного угла с ребром l, поэтому $\gamma = \hat{C}$. Имеем:

$$\cos \gamma = \cos \hat{C},\ \cos \alpha = \cos \beta = 0,\ \sin \alpha = \sin \beta = 1,$$

т. е. равенство (1) выполняется.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\alpha = 90^\circ$, $\beta \neq 90^\circ$. В плоскости угла lh от угла l в полуплоскость, содержащую луч h, отложим прямой угол ll' (рис. 30г). Ясно, что $\beta' = \widehat{l'h} = \pm (90^\circ - \beta)$, $\widehat{kl'} = \hat{C}$. Угол kl' является проекцией угла hk на плоскость угла kl', поэтому $\cos \widehat{hk} = \cos \widehat{kl'} \cos \widehat{l'h}$ (предлагаем читателю самостоятельно убедиться в этом). Таким



а) б) в) г)

РИС. 30

образом, $\cos\gamma = \cos\hat{C}\cos\beta' = \cos\hat{C}\sin\beta$. Так как $\alpha = 90^\circ$, то эта формула совпадает с формулой (1). ■

2. Взаимно полярные трехгранные углы

Трехгранный угол $SA'B'C'$ называется *полярным* (дополнительным) по отношению к данному трехгранному углу $SABC$, если его ребра SA', SB', SC' удовлетворяют условиям: $SA' \perp SBC$, $SB' \perp SAC$, $SC' \perp SAB$ и, кроме того, выполняются условия: а) лучи SA и SA' лежат в одном полупространстве с границей SBC, значит, эти лучи либо совпадают, либо угол ASA' острый; б) лучи SB и SB' лежат в одном полупространстве с границей SAC, значит, эти лучи либо совпадают, либо угол BSB' острый; в) лучи SC и SC' лежат в одном полупространстве с границей SAB, значит, эти лучи либо совпадают, либо угол CSC' острый.

Докажем, что *если трехгранный угол $SA'B'C'$ является полярным по отношению к трехгранному углу $SABC$, то трехгранный угол $SABC$ является полярным по отношению к трехгранному углу $SA'B'C'$*. В самом деле, из соотношений $SB' \perp SAC$, $SC' \perp SAB$ следует, что $SA \perp SB'C'$. Аналогично, $SB \perp SA'C'$ и $SC \perp SA'B'$. Если все плоские углы трехгранного угла $SABC$ прямые, то он совпадает с полярным трехгранным углом $SA'B'C'$, а именно лучи SA и SA', SB и SB', SC и SC' попарно совпадают. В остальных случаях, как следует из пунктов а), б), в) определения трехгранного угла, полярного по отношению к данному трехгранному углу, лучи SA' и SA лежат в одном полупространстве с границей $SB'C'$, лучи SB' и SB — в одном полупространстве с границей $SA'C'$, лучи SC' и SC — в одном полупространстве с границей $SA'B'$.

Если $SABC$ и $SA'B'C'$ — взаимно полярные трехгранные углы, то можно установить соответствие между плоскими углами одного из них и двугранными углами другого: будем считать, что данный плоский угол одного из них соответствует тому из двугранных углов другого, грани которого соответственно перпендикулярны к сторонам данного плоского угла.

Лемма. *Сумма мер соответствующих углов двух взаимно полярных трехгранных углов равна* 180°.

□ Пусть $SABC$ и $SA'B'C'$ — данные взаимно полярные трехгранные углы. Докажем, например, что $\widehat{A'SB'} + \hat{C} = 180°$.

Так как $SA' \perp SBC$, $SB' \perp SAC$, то $A'SB' \perp SC$. Отсюда следует, что плоскость $A'SB'$ пересекает двугранный угол с ребром SC по некоторому линейному углу A_0SB_0 (обозначения выбраны так, что лучи SA и SA_0 лежат на одной грани, а лучи SB и SB_0 — на другой). Стороны углов A_0SB_0 и $A'SB'$ расположены в одной плоскости, проходящей через точку S и перпендикулярной прямой SC. Возможны три случая: 1) $\hat{C} = 90°$, тогда угол A_0SB_0 — прямой, следовательно, он совпадает с углом $A'SB'$, поэтому $\hat{C} + \widehat{A'SB'} = 180°$; 2) $\hat{C} < 90°$, тогда $SA' \perp SB_0$, $SB' \perp SA_0$ и стороны угла $A'SB'$ расположены во внешней области угла A_0SB_0 (рис. 31а). По теореме 2 § 21 [7] $\widehat{A'SB'} + \widehat{A_0SB_0} = 180°$, т. е. $\widehat{A'SB'} + \hat{C} = 180°$; 3) $\hat{C} > 90°$, в этом случае аналогично получаем, что $\widehat{A'SB'} + \hat{C} = 180°$ (рис. 31б). ■

Используя эту лемму, докажем теорему, двойственную теореме косинусов.

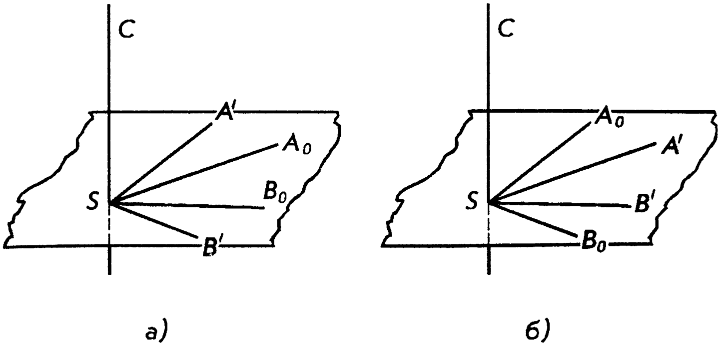


РИС. 31

Т е о р е м а 2. *Если $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — меры соответствующих двугранных углов трехгранного угла SABC, то*

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} \cos \widehat{ASB}. \qquad (3)$$

□ Рассмотрим трехгранный угол $SA'B'C'$, полярный по отношению к данному углу $SABC$, и применим к нему теорему косинусов: $\cos \widehat{A'SB'} = \cos \widehat{B'SC'} \cdot \cos \widehat{A'SC'} + \sin \widehat{B'SC'} \cdot \sin \widehat{A'SC'} \cdot \cos \hat{C}'$.

По предыдущей лемме $\widehat{A'SB'} = 180° - \hat{C}$, $\widehat{B'SC'} = 180° - \hat{A}$, $\widehat{A'SC'} = 180° - \hat{B}$, $\hat{C}' = 180° - \widehat{ASB}$.

Подставив эти значения в предыдущую формулу, получим равенство (3). ■

3. Теорема синусов для трехгранных углов

Т е о р е м а 3. *В трехгранном угле SABC*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin \beta}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \hat{C}}, \qquad (4)$$

где $\alpha = \widehat{BSC}$, $\beta = \widehat{CSA}$, $\gamma = \widehat{ASB}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — меры соответствующих двугранных углов данного трехгранного угла.

□ Подставив в правую часть тождества

$$\frac{\sin^2 \hat{C}}{\sin^2 \gamma} = \frac{1 - \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \gamma}$$

значение $\cos \hat{C}$ из формулы (1), после несложных преобразований получим:

$$\frac{\sin^2 \hat{C}}{\sin^2 \gamma} = \frac{1 - \cos^2 \alpha + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}. \quad (5)$$

Выражая аналогично отношения $\frac{\sin^2 \hat{A}}{\sin^2 \alpha}$ и $\frac{\sin^2 \hat{B}}{\sin^2 \beta}$, мы приходим к выводу, что они равны правой части соотношения (5). Таким образом, $\frac{\sin^2 \hat{A}}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \hat{B}}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin^2 \hat{C}}{\sin^2 \gamma}$. Отсюда, учитывая, что синусы углов, входящих в это соотношение, положительны, получим равенство (4). ■

4. Соотношения между углами трехгранного угла

Теорема 4. *В трехгранном угле:* 1^0. *Каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.* 2^0. *Сумма его двугранных углов больше* $180°$. 3^0. *Сумма его плоских углов меньше* $360°$.

□ Пусть α, β, γ, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — меры плоских и соответствующих двугранных углов трехгранного угла $SABC$.

1^0. Докажем, например, что $\gamma < \alpha + \beta$. Так как $\gamma < 180°$, то это неравенство очевидно, если $\alpha + \beta \geqslant 180°$, поэтому докажем его в предположении, что $\alpha + \beta < 180°$.

По теореме косинусов $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \hat{C}$. Отсюда получаем: $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \hat{C}$ или $\cos \gamma = \cos (\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta (1 + \cos \hat{C})$. Так как $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$, $1 + \cos \hat{C} > 0$, то $\cos \gamma > \cos (\alpha + \beta)$, поэтому $\gamma < \alpha + \beta$.

2^0. По теореме, двойственной теореме косинусов,

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} \cos \gamma.$$

Отсюда получаем:

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} - \sin \hat{A} \sin \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} \cos \gamma$$

или $\cos \hat{C} = -\cos (\hat{A} + \hat{B}) + \sin \hat{A} \sin \hat{B} (\cos \gamma - 1)$, $\cos \hat{C} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} (1 - \cos \gamma) = \cos (180° - \hat{A} - \hat{B})$. Так как $\sin \hat{A} > 0$, $\sin \hat{B} > 0$, $1 - \cos\gamma > 0$, то $\cos \hat{C} < \cos(180^\circ - \hat{A} - \hat{B})$, поэтому $\hat{C} > 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$ или $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$.

3^0. Обозначим через $\hat{A'}$, $\hat{B'}$, $\hat{C'}$ меры двугранных углов трехгранного угла $SA'B'C'$, полярного по отношению к данному. Согласно лемме п. 2 $\hat{A'} = 180^\circ - \alpha$, $\hat{B'} = 180^\circ - \beta$, $\hat{C'} = 180^\circ - \gamma$. Подставив эти значения в доказанное выше неравенство: $\hat{A'} + \hat{B'} + \hat{C'} > 180^\circ$, после элементарных преобразований получим: $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$. ■

§ 22. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ

1. Равенство трехгранных углов

Согласно общему определению равенства фигур трехгранные углы $SABC$ и $S'A'B'C'$ называются равными, если существует наложение f, при котором трехгранный угол $SABC$ отображается на трехгранный угол $S'A'B'C'$. При этом, очевидно, $S' = f(S)$, а каждое ребро трехгранного угла $SABC$ отображается на какое-нибудь ребро трехгранного угла $S'A'B'C'$, каждая грань трехгранного угла $SABC$ отображается на какую-нибудь грань трехгранного угла $S'A'B'C'$. Условимся равенство трехгранных углов $SABC$ и $S'A'B'C'$ записывать так: $SABC = S'A'B'C'$, при этом предполагаем, что существует наложение f такое, что ребра SA, SB, SC переходят соответственно в ребра $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$, а, следовательно, грани BSA, ASC, CSB переходят соответственно в грани $B'S'A'$, $A'S'C'$, $C'S'B'$.

Учитывая свойство 7^0 § 3, мы заключаем, что если $SABC = S'A'B'C'$, то $\overline{SABC} = \overline{S'A'B'C'}$.

Докажем лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма. *Если трехгранные углы $SABC$ и $S'A'B'C'$ равны, то трехгранные углы $SA_1B_1C_1$ и $S'A_1'B_1'C_1'$, соответственно полярные по отношению к ним, также равны.*

□ Так как $SABC = S'A'B'C'$, то существует наложение f такое, что $S'A'B'C' = f(SABC)$. Учитывая определение взаимно полярных углов, читатель без труда убедится в том, что $S'A_1'B_1'C_1' = f(SA_1B_1C_1)$, поэтому $SA_1B_1C_1 = S'A_1'B_1'C_1'$. ■

2. Признаки равенства трехгранных углов

Докажем теорему, выражающую признаки равенства трехгранных углов. Эти признаки в известном смысле аналогичны признакам равенства треугольников.

Теорема. *Два трехгранных угла равны, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1^0. *Два плоских угла и двугранный угол, заключенный между ними, одного из них соответственно равны двум плоским углам и двугранному углу, заключенному между ними, другого.*

2^0. *Три плоских угла одного из них соответственно равны трем плоским углам другого.*

3^0. *Один из плоских углов и прилежащие к нему двугранные углы одного из них соответственно равны одному из плоских углов и прилежащим к нему двугранным углам другого.*

4^0. *Три двугранных угла одного из них соответственно равны трем двугранным углам другого.*

□ Пусть $SABC$ и $S'A'B'C'$ — данные трехгранные углы, а $SA_1B_1C_1$ и $S'A_1'B_1'C_1'$ — трехгранные углы, соответственно полярные по отношению к данным.

1^0. Докажем, что $SABC = S'A'B'C'$, если $\widehat{BSC} = \widehat{B'S'C'}$, $\widehat{ASC} = \widehat{A'S'C'}$, $\hat{C} = \hat{C}'$.

Обозначим грани двугранного угла с ребром SC трехгранного угла $SABC$ через λ, μ, а грани двугранного угла с ребром $S'C'$ трехгранного угла $S'A'B'C'$ — через λ', μ' и рассмотрим линейные углы A_0SB_0 и $A_0'S'B_0'$ этих двугранных углов. При этом предполагаем, что точки A, A_0 принадлежат грани λ, точки B, B_0 — грани μ, точки A', A_0' — грани λ', а точки B', B_0' — грани μ'.

Согласно аксиоме III_6 существует наложение f такое, что $S' = f(S)$, луч SA_0 переходит в луч $S'A_0'$, луч SB_0 в луч $S'B_0'$, а полупространство с границей

A_0SB_0, содержащее точку C,— в полупространство с границей $A_0'S'B_0'$, содержащее точку C'. Докажем, что при этом наложении трехгранный угол $SABC$ переходит в трехгранный угол $S'A'B'C'$. В самом деле, так как прямая CS переходит в прямую $C'S'$, то луч SC переходит в луч $S'C'$. Отсюда мы заключаем, что $\lambda' = f(\lambda)$, $\mu' = f(\mu)$, а так как $\angle BSC = \angle B'S'C'$ и $\angle ASC = \angle A'S'C'$, то луч SB переходит в луч $S'B'$, а луч SC — в луч $S'C'$. Таким образом, при наложении f ребра SC, SB, SA трехгранного угла $SABC$ переходят соответственно в ребра $S'C'$, $S'B'$, $S'A'$ трехгранного угла $S'A'B'C'$. Отсюда следует, что грани трехгранного угла $SABC$ переходят соответственно в грани трехгранного угла $S'A'B'C'$, т. е. $SABC = S'A'B'C'$.

2^0. Докажем, что $SABC = S'A'B'C'$, если $\widehat{BSC} = \widehat{B'S'C'}$, $\widehat{ASC} = \widehat{A'S'C'}$ и $\widehat{ASB} = \widehat{A'S'B'}$. По теореме косинусов $\cos\widehat{ASB} = \cos\widehat{BSC} \cdot \cos\widehat{ASC} + \sin\widehat{BSC} \times \sin\widehat{ASC} \cdot \cos\hat{C}$, $\cos\widehat{A'S'B'} = \cos\widehat{B'S'C'} \cdot \cos\widehat{A'S'C'} + \sin\widehat{B'S'C'} \cdot \sin\widehat{A'S'C'} \cdot \cos\hat{C'}$. Так как $\sin\widehat{BSC} \neq 0$, $\sin\widehat{ASC} \neq 0$, то из этих равенств следует, что $\cos\hat{C} = \cos\hat{C'}$, т. е. $\hat{C} = \hat{C'}$. Таким образом, по признаку 1^0 $SABC = S'A'B'C'$.

3^0. Предположим, что $\widehat{ASB} = \widehat{A'S'B'}$, $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$. По лемме § 21 $\widehat{ASB} + \hat{C_1} = 180°$, $\widehat{A'S'B'} + \hat{C_1}' = 180°$. Так как $\widehat{ASB} = \widehat{A'S'B'}$, то $\hat{C_1} = \hat{C_1}'$. Аналогично, учитывая равенства $\hat{A} = \hat{A'}$ и $\hat{B} = \hat{B'}$, получаем: $\widehat{B_1SC_1} = \widehat{B_1'S'C_1'}$ и $\widehat{A_1SC_1} = \widehat{A_1'S'C_1'}$. Таким образом, $SA_1B_1C_1 = S'A_1'B_1'C_1'$ по признаку 1^0. По предыдущей лемме $SABC = S'A'B'C'$.

4^0. Предположим, что $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$. Из этих равенств, используя лемму § 21 по аналогии с доказательством признака 3^0, получаем: $\widehat{B_1SC_1} = \widehat{B_1'S'C_1'}$, $\widehat{A_1SC_1} = \widehat{A_1'S'C_1'}$ и $\widehat{A_1SB_1} = \widehat{A_1'S'B_1'}$. По признаку 2^0 $SA_1B_1C_1 = S'A_1'B_1'C_1'$, поэтому по предыдущей лемме $SABC = S'A'B'C'$. ■

§ 23. СФЕРА

1. Сфера и ее элементы

Сферой называется фигура, состоящая из множества всех точек пространства, расстояние от каждой из которых до данной точки O равно данному положительному числу r. Точка O называется *центром* сферы, а отрезок, соединяющий точку O с любой точкой сферы,— ее *радиусом*. Все радиусы сферы имеют длину r. Число r также называется радиусом сферы.

Сфера разбивает множество всех точек пространства, не принадлежащих ей, на два подмножества: *внутреннюю* и *внешнюю* области относительно сферы. Внутренней области принадлежат те точки пространства, расстояние от каждой из которых до центра меньше радиуса, а внешней области — те точки, расстояние от каждой из которых до центра больше радиуса[1]. Точки внутренней области называются *внутренними* точками, а точки внешней области — *внешними* точками относительно сферы. Фигура, состоящая из объединения всех точек сферы и ее внутренней области, называется *шаром*. Точка O называется *центром* шара, а число r — его *радиусом*. Сама сфера называется *границей* шара.

Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр сферы, называется *диаметром* сферы. Концы любого диа-

[1] Здесь предполагается, что если точки A и B совпадают, то расстояние между ними равно нулю. В соответствии с этим соглашением будем считать, что если точка лежит на прямой (плоскости), то расстояние от этой точки до прямой (плоскости) равно нулю.

метра называются *диаметрально противоположными точками* сферы.

Сферу можно задать центром и радиусом, а также четырьмя ее точками, не принадлежащими одной плоскости. В самом деле, имеет место следующая лемма.

Лемма. *Через четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, проходит одна и только одна сфера.*

□ Пусть A, B, C, D — данные точки, не принадлежащие одной плоскости. Докажем сначала, что существует сфера Ω, проходящая через эти точки. Для этого достаточно доказать, что существует точка, равноудаленная от точек A, B, C, D. Согласно задаче 2 § 11 любая точка прямой a, проходящей через центр описанной около треугольника ABC окружности и перпендикулярной к плоскости ABC, равноудалена от точек A, B, C. С другой стороны, согласно задаче 1 § 11 любая точка плоскости α, проходящей через середину отрезка AD и перпендикулярной к этой прямой a, равноудалена от точек A и D. Так как точка D не лежит в плоскости ABC, то прямая a пересекает плоскость α в некоторой точке O. Ясно, что точка O равноудалена от всех четырех точек A, B, C и D, значит, сфера Ω с центром O радиуса OA проходит через точки A, B, C и D.

Докажем теперь, что любая сфера Ω', проходящая через точки A, B, C, D, совпадает со сферой Ω. В самом деле, центр O' сферы Ω' лежит как на прямой a, так и на плоскости α, поэтому точка O' совпадает с точкой O, а, следовательно, сферы Ω' и Ω совпадают. ■

2. Взаимное расположение плоскости и сферы

Докажем теорему о взаимном расположении плоскости и сферы.

Теорема 1. *Пусть d — расстояние от центра O сферы радиуса r до плоскости α. Тогда, если $d < r$, то сечение сферы плоскостью α есть окружность с центром O_1 радиуса $\sqrt{r^2 - d^2}$, где O_1 — проекция точки O на плоскость α; если $d = r$, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку; если $d > r$ — ни одной общей точки.*

□ Рассмотрим сначала случай, когда $d < r$. Пусть ω — окружность плоскости α с центром O_1 радиуса

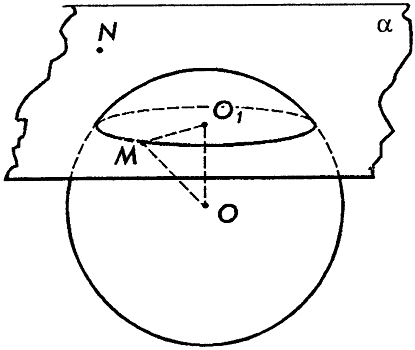


РИС. 32

$\sqrt{r^2 - d^2}$ (рис. 32). Докажем, что любая точка M этой окружности принадлежит данной сфере. Если $O \in \alpha$, то $d = 0$ и $OM = r$, а если $O \notin \alpha$, то, применяя теорему Пифагора к треугольнику OO_1M, получаем: $OM = \sqrt{OO_1^2 + O_1M^2} = \sqrt{d^2 + r^2 - d^2} = r$, значит, M — точка данной сферы. Для любой точки N плоскости α, не принадлежащей окружности ω, расстояние O_1N не равно $\sqrt{d^2 - r^2}$, поэтому $ON \neq r$, т. е. N не является точкой данной сферы. Таким образом, сечение сферы плоскостью α есть окружность ω.

Рассмотрим теперь случай, когда $d = r$, т. е. когда расстояние от точки O до плоскости α равно r. Так как расстояние от точки O до плоскости α меньше расстояния от точки O до любой точки плоскости α, отличной от точки O_1, то O_1 — единственная точка плоскости α, принадлежащая данной сфере.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $d > r$. В этом случае расстояние от точки O до любой точки плоскости α больше или равно d, поэтому сфера и плоскость α не имеют ни одной общей точки. ■

Следствие. *Если плоскость проходит через центр O сферы радиуса r, то сечение сферы плоскостью есть окружность с центром O радиуса r.*

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью* к сфере, а эта точка — *точкой касания.*

Теорема 2. *Плоскость является касательной к сфере тогда и только тогда, когда она проходит через точку сферы и перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку.*

□ Пусть α — касательная плоскость к сфере с центром O и радиусом r, а O_1 — проекция точки O на плоскость α. По предыдущей теореме $OO_1 = r$, поэтому O_1 — точка сферы, а OO_1 — радиус сферы, $OO_1 \perp \alpha$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть плоскость α проходит через точку M данной сферы с центром O радиуса r и $OM \perp \alpha$. Так как $OM = r$, то по теореме 1 плоскость α и сфера имеют только одну общую точку, т. е. α — касательная плоскость к сфере. ■

Следствие. *Через каждую точку сферы проходит одна и только одна плоскость, касательная к сфере.*

3. Взаимное расположение прямой и сферы

Рассмотрим сферу Ω с центром O радиуса r и прямую l. По следствию теоремы 1 плоскость, проходящая через прямую l и точку O, пересекает сферу Ω по окружности ω с центром O радиуса r. Ясно, что вопрос о взаимном расположении прямой l и сферы Ω сводится к вопросу о взаимном расположении прямой l и окружности ω, который был нами подробно рассмотрен в § 43 и § 44 [7].

Используя выводы, изложенные в этих параграфах, приходим к следующим утверждениям:

1°. *Прямая и сфера не могут иметь более чем две общие точки.*

Прямая называется *касательной* к сфере, если она имеет со сферой только одну общую точку.

Из теоремы 1 § 43 [7] следует утверждение.

2°. *Пусть d — расстояние от центра O сферы радиуса r до прямой l. Тогда, если $d < r$, то прямая пересекает сферу в двух точках; если $d = r$, прямая имеет со сферой только одну общую точку; если $d > r$, прямая и сфера не имеют общих точек.*

Используя это свойство, по аналогии с доказательством теоремы 2 можно доказать утверждение.

3°. *Прямая является касательной к сфере тогда и только тогда, когда она проходит через точку сферы и перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку.*

Отсюда непосредственно следует, что через каждую точку M, внешнюю относительно данной сферы, проходит бесконечное множество прямых, каждая из которых является касательной к сфере. В самом деле, через прямую MO, где O — центр сферы, проходит бесконечное множество плоскостей. Каждая из них пересекает сферу по окружности, касательные к которой, проведенные из точки M, согласно свойству 3^0 являются касательными к сфере.

4^0. *Множество всех касательных прямых к сфере в данной ее точке A есть пучок прямых с центром A, плоскостью которого является касательная плоскость к сфере в данной точке A.*

□ Обозначим через Ω пучок прямых с центром A и плоскостью α, где α — касательная плоскость к данной сфере в точке A. Согласно теореме 2 $OA \perp \alpha$, где O — центр данной сферы.

Возьмем произвольную касательную прямую l к сфере в точке A. По свойству 3^0 $l \perp OA$. Так как $\alpha \perp OA$, то прямая l лежит в плоскости α, следовательно, $l \in \Omega$. Обратно, возьмем произвольную прямую l пучка Ω. Тогда $A \in l$, и так как $\alpha \perp OA$, то $l \perp OA$. Согласно свойству 3^0 прямая l является касательной к сфере в точке A. ■

5^0. *Отрезки касательных к сфере, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр сферы.*

□ Пусть MT_1 и MT_2 — касательные к сфере с центром O, а T_1 и T_2 — точки касания. По свойству 3^0 углы MT_1O и MT_2O — прямые, т. е. треугольники MT_1O и MT_2O — прямоугольные. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OM и равные катеты OT_1 и OT_2. Следовательно, $MT_1 = MT_2$ и $\angle\ OMT_1 = \angle\ OMT_2$. ■

4. Взаимное расположение двух сфер

Теорема 3. *Пусть центры O_1 и O_2 двух сфер с радиусами R_1 и R_2 не совпадают, $d = O_1O_2$. Тогда если $d < R_1 + R_2$ и $d > |R_1 - R_2|$, то сферы пересекаются по окружности, центр которой лежит на прямой O_1O_2, а плоскость окружности перпендикулярна к этой прямой; если $d = R_1 + R_2$ или $d = |R_1 - R_2|$, то сферы имеют только одну общую точку; если $d > R_1 + R_2$ или $d < |R_1 - R_2|$, то сферы не имеют общих точек.*

□ Через прямую O_1O_2 проведем какую-нибудь плоскость α. По следствию теоремы 1 сечениями данных сфер этой плоскостью являются окружности ω_1 и ω_2

с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2. В соответствии с теоремой 1 § 45 [7] рассмотрим три возможных случая.

а) $d < R_1 + R_2$ и $d > |R_1 - R_2|$. В этом случае окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух точках A и B, симметричных относительно прямой O_1O_2. Эти точки, очевидно, являются общими точками данных сфер. Но тогда любая точка M окружности γ с диаметром AB, расположенной в плоскости β, перпендикулярной к прямой O_1O_2, является общей точкой данных сфер. В самом деле, $MC = AC$, где C — середина отрезка AB, поэтому $\Delta MO_1C = \Delta AO_1C$, $MO_1 = AO_1 = R_1$. Аналогично, $MO_2 = R_2$.

Докажем, что любая общая точка K данных сфер лежит на окружности γ. Для этого рассмотрим поворот вокруг прямой O_1O_2, при котором точка K переходит в точку K', лежащую в плоскости α. Так как $O_1K = O_1K' = R_1$, $O_2K = O_2K' = R_2$, то K' совпадает с одной из точек A или B, следовательно, K — точка окружности γ.

б) $d = R_1 + R_2$ или $d = |R_1 - R_2|$. Окружности ω_1 и ω_2 имеют только одну общую точку M, лежащую на прямой O_1O_2, которая является общей точкой данных сфер. Для любой точки X, не лежащей на прямой O_1O_2, имеем: $O_1X + O_2X > O_1O_2 = d$ и $|O_1X - O_2X| < O_1O_2 = d$, поэтому точка X не может быть общей точкой данных сфер. Итак, в этом случае данные сферы имеют только одну общую точку.

в) $d > R_1 + R_2$ или $d < |R_1 - R_2|$. В этом случае данные сферы не имеют общих точек, так как если, например, X — общая точка данных сфер, то для трех точек O_1, O_2, X имеем неравенства: $O_1X + O_2X \geqslant O_1O_2$ и $|O_1X - O_2X| \leqslant O_1O_2$ или $R_1 + R_2 \geqslant d$ и $|R_1 - R_2| \leqslant d$, что невозможно. ■

§ 24. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Большие окружности сферы

Сечение сферы произвольной плоскостью, проходящей через центр сферы, называется *большой окружностью сферы*. Согласно следствию теоремы 1 § 23 центр любой большой окружности совпадает с центром сферы, а радиус большой окружности равен радиусу сферы. Рассмотрим два свойства больших окружностей сферы:

1°. *Через любые две диаметрально противоположные точки сферы проходит бесконечное множество больших окружностей сферы.*

□ Пусть A и B — диаметрально противоположные точки данной сферы с центром O. Проведем через прямую AB произвольную плоскость. Так как точка O лежит на прямой AB, то по следствию теоремы 1 § 23 сечение сферы этой плоскостью есть большая окружность сферы, проходящая через точки A и B. Так как через прямую AB проходит бесконечное множество плоскостей, то через точки A и B проходит бесконечное множество больших окружностей сферы. ■

2°. *Через произвольные две не диаметрально противоположные точки сферы проходит одна и только одна большая окружность сферы.*

□ Если A и B — две данные не диаметрально противоположные точки сферы с центром O, то точки A, B и O не лежат на одной прямой, поэтому существует единственная плоскость, проходящая через эти три точки. Сечение сферы этой плоскостью и есть единственная большая окружность, проходящая через точки A и B. ■

2. Простейшие фигуры на сфере

Пусть A и B — две не диаметрально противоположные точки сферы. По свойству 2° через эти точки проходит единственная большая окружность γ. *Сферическим отрезком* AB (или BA) назовем ту из дуг окружности γ с концами A и B, которая меньше полуокружности (рис. 33). Точки A и B называются концами этого сферического отрезка. Таким образом, для любых двух не диаметрально противоположных точек сферы существует единственный сферический отрезок с концами в этих точках.

Пусть γ — большая окружность сферы, а α — плоскость этой окружности. *Полусферой* с границей γ называется пересечение сферы и полупространства с границей α. Ясно, что каждая большая окружность γ на сфере определяет две полусферы с общей границей γ. Пользуясь аксиомой II_5, нетрудно строго дока-

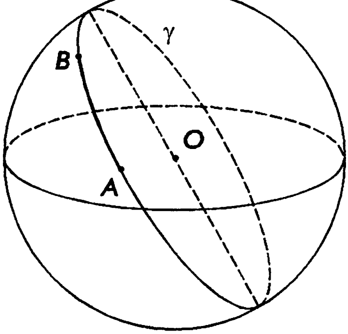


РИС. 33

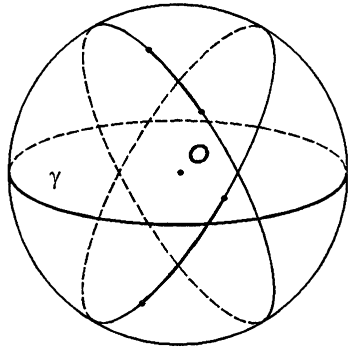


РИС. 34

зать, что каждая большая окружность γ данной сферы разделяет все точки этой сферы, не принадлежащие окружности, на две полусферы с общей границей γ так, что любой сферический отрезок, концы которого принадлежат одной полусфере, не пересекается с окружностью γ, а любой сферический отрезок, концы которого принадлежат разным полусферам, пересекается с γ (рис. 34).

Докажем, что *любые две большие окружности сферы пересекаются в двух диаметрально противоположных точках*. В самом деле, плоскости данных двух окружностей проходят через центр O сферы, поэтому пересекаются по некоторой прямой, проходящей через точку O. Эта прямая пересекает сферу в двух диаметрально противоположных точках, которые и являются общими точками данных окружностей.

Углом между большими окружностями γ_1 и γ_2 называется угол между касательными к этим окружностям в одной из точек пересечения. Заметим, что угол между касательными к окружностям γ_1 и γ_2 в одной из точек пересечения равен углу между касательными в другой точке пересечения (как углы между соответственно параллельными прямыми). Большие окружности сферы называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.

Полюсами большой окружности сферы называются концы диаметра сферы, перпендикулярного к плоскости большой окружности. Каждая большая окружность имеет два полюса. Ясно, что две большие окружности сферы перпендикулярны тогда и только тогда, когда каждая из них проходит через полюсы другой. Отсюда следует, что все большие окружности, проходящие через полюсы данной большой окружности γ, перпендикулярны к γ. С другой стороны, через точку сферы, не являющуюся полюсом большой окружности γ, проходит единственная большая окружность, перпендикулярная к γ.

Рассмотрим две диаметрально противоположные точки A и B сферы и две полуокружности на сфере с общим диаметром AB, не принадлежащие одной большой окружности. Фигура, образованная этими полуокружностями, называется *сферическим двуугольником* или просто *двуугольником* и обозначается через AB. Полуокружности называются *сторонами*, а точки A и B — *вершинами* двуугольника.

Двугранный угол с ребром AB, грани которого содержат стороны двуугольника, назовем двугранным углом, соответствующим двуугольнику AB. Пересечение сферы и внутренней области двугранного угла, соответствующего данному двуугольнику, называется *внутренней областью этого двуугольника*. Объединение двуугольника и его внутренней области также будем называть сферическим двуугольником. Углом сферического двуугольника назовем линейный угол двугранного угла, соответствующего данному двуугольнику.

3. Понятие о сферической геометрии

Раздел геометрии, изучающий фигуры, расположенные на сфере, называется *сферической геометрией*. Геометрия на сфере и геометрия на плоскости имеют сходства и различия.

Роль прямых на сфере («сферические прямые») играют большие окружности, некоторые свойства которых аналогичны свойствам прямых на плоскости. Так, например, через любые две не диаметрально противоположные точки сферы проходит единственная большая окружность; на каждой большой окружности существует бесчисленное множество точек; через точку сферы, не являющуюся полюсом большой окружности, проходит единственная большая окружность, перпендикулярная к данной. Можно также доказать, что для любых двух точек сферы кратчайшая дуга на сфере, соединяющая эти точки, есть та из дуг большой окружности с концами в этих точках, которая не больше полуокружности.

Расстоянием между не диаметрально противоположными точками A и B на сфере называется длина сферического отрезка AB. Это расстояние вычисляется по формуле: $\rho(A, B) = r\widehat{AOB}$, где O — центр сферы, r — ее радиус, а $\widehat{AOB}$ — радианная мера угла. Расстоянием между диаметрально противоположными точками называется длина полуокружности большой окружности.

Известно, что на плоскости любая прямая разделяет ее на две полуплоскости. Аналогично, большая окружность на сфере разделяет сферу на две полусферы, причем свойство, сформулированное в п. 2, вполне аналогично аксиоме II_4.

Различия между прямыми на плоскости и большими окружностями на сфере характеризуют следующие факты сферической геометрии: через диаметрально противоположные точки сферы проходит бесконечное множество больших окружностей (свойство 1^0); любые две большие окружности на сфере пересекаются; через полюс данной окружности проходит бесконечное множество больших окружностей, перпендикулярных к данной.

Отметим, что большие окружности сферы, в отличие от прямых на плоскости, являются замкнутыми линиями, поэтому точка, взятая на большой окружности, не разделяет ее на два подмножества, т. е. на сфере нет аналога луча. В некотором смысле можно считать, что полуокружности больших окружностей являются «сферическими лучами», а сферические двуугольники — «сферическими углами».

Отметим, наконец, что на сфере, так же, как и на плоскости, можно ввести понятие равенства сферических фигур. Для этого, используя наложения пространства, вводится понятие наложения на сфере. Будем рассматривать только такие наложения пространства, при которых центр O данной сферы переходит в себя. Так как наложение является движением, то ясно, что при наложении, которое точку O переводит в себя, данная сфера переходит в себя. Верно и обратное: если при некотором наложении пространства сфера переходит в себя, то при этом наложении центр сферы переходит в себя.

Если при наложении сфера S переходит в себя, то это наложение порождает на сфере S некоторое преобразование, которое будем называть *сферическим наложением*.

Исходя из общего определения равенства фигур, две фигуры на сфере равны тогда и только тогда, когда существует сферическое наложение, при котором одна фигура переходит в другую. Можно доказать, что два сферических отрезка равны тогда и только тогда, когда их длины равны, а два сферических двуугольника равны тогда и только тогда, когда их углы равны.

§ 25. СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. Сферические треугольники

Сферическим треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех сферических отрезков, попарно соединяющих три точки, не лежащие на одной большой окружности. Эти точки назовем *вершинами* сферического треугольника, а сферические отрезки — его *сторонами*. Сферический треугольник с вершинами A, B и C обозначается через ABC (рис. 35).

Если на сфере с центром O дан сферический треугольник ABC, то трехгранный угол с вершиной O и ребрами OA, OB, OC назовем *центральным трехгранным углом*, соответствующим треугольнику ABC (см. рис. 35).

Внутренней областью сферического треугольника назовем пересечение сферы с внутренней областью центрального трехгранного угла, соответствующего этому треугольнику. Объединение сферического треугольника и его внутренней области также называется сферическим треугольником.

С каждым сферическим треугольником ABC связаны три двуугольника AA_1, BB_1 и CC_1, на сторонах каждого из которых лежат две другие вершины сфе-

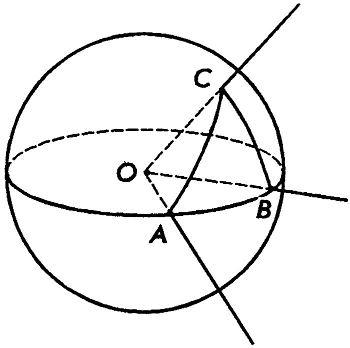


РИС. 35

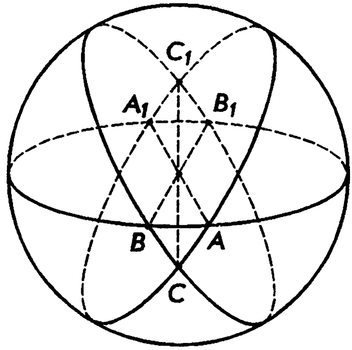


РИС. 36

рического треугольника (например, на разных сторонах двуугольника AA_1 лежат вершины B и C) (рис. 36). Эти двуугольники и будем называть двуугольниками данного сферического треугольника ABC.

Длины сферических отрезков AB, BC и CA называются длинами соответствующих сторон сферического треугольника ABC, а меры углов двуугольников этого сферического треугольника — мерами соответствующих углов.

2. Свойства сферических треугольников

Если ABC — сферический треугольник, то ясно, что длины его сторон пропорциональны линейным углам центрального трехгранного угла, соответствующего этому треугольнику, а углы сферического треугольника равны двугранным углам этого трехгранного угла. Отсюда, используя теоремы § 21, получаем следующие свойства сферического треугольника.

1^0. *Сумма углов сферического треугольника больше 180°.*

В соответствии с этим свойством существуют сферические треугольники, у которых два или даже три прямых угла. В самом деле, на большой окружности ω рассмотрим две точки A и B. Пусть C — полюс ω. Тогда в сферическом треугольнике ABC углы A и B — прямые (см. рис. 36), а если и C — прямой угол, то все три угла сферического треугольника ABC прямые.

Обозначим длины сторон сферического треугольника ABC через $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, а меры его углов через $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. Тогда для сферического треугольника ABC выполняются:

2°. *Сферическая теорема косинусов:*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C}.$$

3°. *Теорема, двойственная теореме косинусов:*

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} \cos c.$$

4°. *Сферическая теорема синусов:*

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}.$$

В частности, если в сферическом треугольнике ABC угол C — прямой, то из сферической теоремы косинусов получаем сферическую теорему Пифагора: $\cos c = \cos a \cos b$.

По общему определению равенства фигур, сферические треугольники ABC и $A'B'C'$ называются равными, если существует наложение f пространства, при котором сферический треугольник ABC отображается на сферический треугольник $A'B'C'$. При этом, очевидно, каждая сторона сферического треугольника ABC отображается на какую-нибудь сторону сферического треугольника $A'B'C'$, поэтому каждая вершина первого треугольника переходит в какую-нибудь вершину второго. Будем считать, что $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Ясно, что если сферические треугольники ABC и $A'B'C'$ сферы с центром O равны, то $f(O) = O$. Поэтому из равенства сферических треугольников ABC и $A'B'C'$ следует, что равны и трехгранные углы с вершиной O и ребрами OA, OB, OC и OA', OB', OC'. Верно и обратное, т. е. если указанные центральные углы, соответствующие сферическим треугольникам, равны, то и сферические треугольники равны.

Таким образом, из признаков равенства трехгранных углов (теорема § 22) мы получаем признаки равенства сферических треугольников.

Теорема. *Два сферических треугольника равны, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1°. *Две стороны и угол между ними одного сфериче-*

ского треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого.

2°. *Три стороны одного сферического треугольника соответственно равны трем сторонам другого.*

3°. *Сторона и два прилежащих к ней угла одного сферического треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого.*

4°. *Три угла одного сферического треугольника соответственно равны трем углам другого.*

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ V

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

187. Даны двугранный угол $A \cdot CD \cdot B$ и внутренняя точка M этого угла. Доказать, что все точки, лежащие на отрезке AB, на луче CM, а также все точки полуплоскости с границей CD, содержащей точку M, являются внутренними точками данного двугранного угла.

188. Доказать, что любой двугранный угол имеет одну и только одну плоскость симметрии[1], проходящую через ребро двугранного угла. Имеет ли двугранный угол другие плоскости симметрии?

189. Доказать, что от любой полуплоскости в данное полупространство можно отложить двугранный угол[2], равный данному, и притом только один.

190. Даны двугранный угол $C \cdot AB \cdot D$, точка O на прямой AB и полуплоскость σ с границей AB, целиком состоящая из внутренних точек данного угла. Доказать, что: а) пересечение полуплоскости σ с углом COD есть некоторый внутренний луч угла COD; б) полуплоскость σ пересекает отрезок CD.

191. Дан двугранный угол $\lambda\mu$. Доказать, что существует наложение, при котором этот угол переходит в

---

[1] Плоскость α называется плоскостью симметрии фигуры F, если эта фигура переходит в себя при симметрии относительно плоскости α.

[2] Будем говорить, что двугранный угол $\lambda\mu$ отложен от полуплоскости λ в полупространство P, если грань λ принадлежит границе этого полупространства, а грань μ — полупространству P. Задача 189 является обобщением аксиомы III_7 об откладывании угла в данную полуплоскость.

себя так, что ребро двугранного угла переходит в себя, грань λ — в грань μ, а грань μ — в грань λ.

192. Плоскости α и β являются плоскостями граней данного двугранного угла, отличного от прямого. Прямые a и b перпендикулярны к плоскостям α и β. Доказать, что угол между прямой a и плоскостью β равен углу между прямой b и плоскостью α.

193. Точка O является внутренней точкой данного двугранного угла с градусной мерой φ. Найти $\widehat{MON}$, где OM и ON — перпендикуляры, проведенные к плоскостям граней двугранного угла.

194. Доказать, что каждый двугранный угол имеет одну и только одну биссектральную полуплоскость. Эта полуплоскость принадлежит плоскости симметрии двугранного угла, проходящей через ребро.

195. Доказать, что биссектральная полуплоскость двугранного угла есть фигура, состоящая из множества всех внутренних точек двугранного угла, каждая из которых равноудалена от плоскостей граней этого угла.

196. Доказать, что: а) при любом подобии двугранный угол переходит в равный ему двугранный угол; б) если два двугранных угла равны, то существует подобие, при котором один из них переходит в другой.

197. Говорят, что один двугранный угол больше другого, если мера первого двугранного угла больше меры второго угла. Доказать, что если $\angle \lambda_1 \mu_1 > \angle \lambda_2 \mu_2$, то существует полуплоскость σ, граница которой совпадает с ребром угла $\lambda_1 \mu_1$, состоящая из внутренних точек этого угла, такая, что $\angle \lambda_1 \sigma = \angle \lambda_2 \mu_2$.

МНОГОГРАННЫЙ УГОЛ

198. Доказать, что в плоскости каждой грани выпуклого многогранного угла нет других точек этого угла, кроме точек этой грани.

199. Доказать, что существует хотя бы одна плоскость, которая пересекает все ребра данного выпуклого многогранного угла.

200. Доказать, что любое сечение выпуклого многогранного угла плоскостью α, пересекающей все ребра, является выпуклым многоугольником, при этом в плоскости α те и только те точки являются внутренними точками многогранного угла, которые лежат внутри этого многоугольника.

201. Доказать, что множество всех точек внутренней области выпуклого многогранного угла с вершиной S является бесконечным выпуклым множеством, причем если точка M принадлежит этому множеству, то все точки луча SM принадлежат этому множеству.

202. Доказать, что многогранный угол является выпуклым, если хотя бы одно из его сечений плоскостью, пересекающей все его ребра, является выпуклым многоугольником.

203. Плоскость β проходит через вершину S данного выпуклого многогранного угла и параллельна плоскости α, пересекающей все его ребра. Доказать утверждения: а) все точки, лежащие внутри данного многогранного угла, и все точки плоскости α принадлежат одному полупространству с границей β; б) если точка M лежит внутри многогранного угла, то луч SM пересекает плоскость α в точке, лежащей внутри сечения многогранного угла плоскостью α.

204. Доказать, что сечение выпуклого многогранного угла плоскостью, проходящей через вершину угла и через некоторую его внутреннюю точку, является неразвернутым углом.

205. Доказать, что плоскость, проходящая через вершину выпуклого многогранного угла и через какую-нибудь внутреннюю точку этого угла, разлагает угол на два выпуклых многогранных угла.

206. Доказать, что через произвольную точку каждого ребра выпуклого четырехгранного угла проходит одна и только одна плоскость, сечением которой данного угла является параллелограмм.

207. Доказать, что в выпуклом многогранном угле каждый плоский угол меньше суммы всех остальных его плоских углов.

208. Доказать, что сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

209. Доказать, что сумма двугранных углов выпуклого n-гранного угла больше $(n-2)180^\circ$.

210. Доказать, что множество всех общих точек биссектральных полуплоскостей трех двугранных углов трехгранного угла образует луч, исходящий из вершины трехгранного угла и целиком состоящий из точек внутренней области трехгранного угла.

211. Доказать, что если по крайней мере два плоских угла трехгранного угла не прямые, то три плоскости, каждая из которых проходит через ребро трехгранного угла перпендикулярно к плоскости противоположной грани, пересекаются по одной прямой.

212. В трехгранном угле $SABC$ $\angle ASB = \angle ASC$. Доказать, что биссектральная полуплоскость двугранного угла с ребром AS данного трехгранного угла принадлежит плоскости, перпендикулярной к плоскости BSC.

213. Доказать, что биссектрисы двух плоских углов и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом трехгранного угла, принадлежат одной плоскости.

214. Доказать, что если все плоские углы трехгранного угла $SABC$ прямые, то проекция вершины S на плоскость ABC совпадает с точкой пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC.

215. Доказать, что если все три плоских угла трехгранного угла прямые, то все его двугранные углы прямые, а если все три плоские угла тупые, то каждый из его двугранных углов больше 90°.

216. Доказать, что в трехгранном угле против равных двугранных углов лежат равные плоские углы и, обратно, против равных плоских углов лежат равные двугранные углы.

217. Доказать, что в трехгранном угле против большего двугранного угла лежит больший плоский угол и, обратно, против большего плоского угла лежит больший двугранный угол.

218. Доказать, что сумма двугранных углов трехгранного угла меньше 540°.

219. Луч SM является внутренним лучом одного из плоских углов ASC или BSC трехгранного угла $SABC$ или целиком состоит из внутренних точек этого угла. Доказать, что сумма плоских углов трехгранного угла $SABC$ больше суммы плоских углов трехгранного угла $SABM$.

220. Дан трехгранный угол $SABC$. Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma \leqslant (\widehat{ASB} + \widehat{BSC} + \widehat{CSA})$, где α, β, γ — углы соответственно между прямой SA и плоскостью SBC, прямой SB и плоскостью SAC, прямой SC и плоскостью SAB.

221. Доказать, что углы, образованные биссектрисами плоских углов трехгранного угла, взятыми попарно, либо все острые, либо все прямые, либо все тупые.

222. В трехгранном угле $SABC$ меры двугранных углов с ребрами SA, SB, SC соответственно равны $90°$, φ, ψ. Доказать, что $\cos\varphi = \sin\psi \cdot \cos\widehat{ASC}$.

223. В трехгранном угле $SABC$ $\widehat{ASB} = 60°$, $\widehat{BSC} = 45°$ и двугранный угол с ребром SC прямой. Найти меру двугранного угла с ребром SA.

224. В трехгранном угле $SABC$ двугранные углы с ребрами SA, SB, SC соответственно равны α, $90°$, α. Найти $\widehat{ASC}$.

225. В трехгранном угле один из плоских углов прямой, а меры прилежащих к нему двугранных углов равны $45°$. Найти меру третьего двугранного угла.

226. В трехгранном угле $SABC$ $\widehat{CSA} = 90°$, $\widehat{BSC} = \widehat{ASB} = 60°$, $SA = SB = SC$. Найти меру двугранного угла $S \cdot AC \cdot B$.

227. Луч, исходящий из вершины трехгранного угла и содержащий точку, лежащую внутри угла, составляет равные углы φ со всеми ребрами этого угла. Найти φ, если все плоские углы трехгранного угла равны α.

228. Доказать, что если два трехгранных угла равны, то полярные углы по отношению к ним также равны.

229. Доказать, что если все плоские углы данного трехгранного угла острые (прямые, тупые), то меры всех двугранных углов полярного по отношению к нему трехгранного угла больше 90° (равны 90°, меньше 90°).

230. Доказать, что трехгранные углы $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$ равны, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) $\widehat{BSC} = \widehat{B_1S_1C_1}$, $\widehat{ASC} = \widehat{A_1S_1C_1}$, $\hat{A} = \hat{A}_1$, причем либо $\hat{B} < 90°$ и $\hat{B}_1 < 90°$, либо $\hat{B} > 90°$ и $\hat{B}_1 > 90°$;

б) $\widehat{BSC} = \widehat{B_1S_1C_1}$, $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$, причем либо углы ASC и $A_1S_1C_1$ острые, либо эти углы тупые.

СФЕРА

231. Доказать, что все точки окружности принадлежат сфере, если выполняется хотя бы одно из условий: а) три точки окружности принадлежат сфере; б) две точки окружности принадлежат сфере и касательная к окружности в одной из этих точек является касательной к сфере.

232. Доказать, что существует одна и только одна сфера, содержащая данную окружность и данную точку, не лежащую в плоскости окружности.

233. Даны две окружности, плоскости которых не совпадают. Доказать, что существует одна и только одна сфера, содержащая данные окружности, если эти окружности: а) пересекаются в двух точках; б) имеют общую точку и в этой точке общую касательную.

234. Доказать, что прямая является касательной к сфере тогда и только тогда, когда она проходит через точку сферы и перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку.

235. Доказать, что через прямую, не имеющую общих точек с данной сферой, проходят две и только две касательные плоскости к данной сфере.

236. Через точку A, не лежащую на сфере с диаметром CE, проведена касательная плоскость α в точке C и касательная прямая AD в точке D, отличной от C. Прямая ED пересекает плоскость α в точке B. Доказать, что $AB = AC$.

237. Произвольная точка M сферы является общим концом трех взаимно перпендикулярных ее хорд. Доказать, что сумма квадратов длин этих хорд постоянна, т. е. не зависит от выбора точки M и хорд на сфере.

238. Даны точки A и B. Найти фигуру, состоящую из множества всех точек, каждая из которых является проекцией точки A на какую-нибудь плоскость, проходящую через точку B.

239. Радиусы сечений сферы двумя перпендикулярными плоскостями равны r_1 и r_2. Найти радиус сферы, если сечения имеют единственную общую точку.

240. Сечения сферы радиуса R двумя параллельными плоскостями, не проходящими через центр, имеют радиусы r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$). Найти расстояние между плоскостями сечений.

241. Плоскость α касается сферы в точке A. Доказать, что сечения сферы плоскостями, проходящими через точку A и составляющими равные углы с плоскостью α, имеют равные радиусы.

242. Три сферы имеют общую хорду. Некоторая точка, лежащая на этой хорде, лежит также на трех отрезках, которые являются соответственно хордами данных сфер. Доказать, что концы этих отрезков лежат на одной сфере или в одной плоскости.

243. Три сферы имеют общую точку, не лежащую в плоскости, проходящей через центры этих сфер. Доказать, что данные сферы имеют еще одну общую точку.

244. Три сферы радиуса R касаются плоскости α, и каждая сфера касается двух других сфер. Доказать, что существует сфера, которая касается плоскости α и трех данных сфер, и найти радиус этой сферы.

245. Три сферы попарно касаются друг друга внешним образом и имеют общую касательную плоскость. Точки касания сфер с этой плоскостью являются вершинами треугольника со сторонами a, b, c. Найти радиусы данных сфер.

246. Две сферы радиуса r и две сферы радиуса R, где $R \geqslant r$, расположены так, что каждая из них касается трех других внешним образом и плоскости α. Найти отношение $r : R$.

247. Доказать, что угол между двумя большими окружностями сферы равен углу между двумя прямыми, каждая из которых проходит через полюсы соответствующей окружности.

248. Доказать, что две большие окружности сферы перпендикулярны тогда и только тогда, когда каждая из них проходит через полюс другой.

249. Доказать, что при движении: а) сфера с центром O радиуса r переходит в сферу с центром O' радиуса r, где O' — образ точки O; б) сфера переходит в себя тогда и только тогда, когда центр сферы является инвариантной точкой движения.

250. Доказать, что каковы бы ни были точки A и B на сфере, существует сферическое наложение, при котором точка A переходит в точку B.

251. На сфере S даны двуугольники AB и CD, меры углов которых равны. Доказать, что существует одно и только одно сферическое наложение сферы S, при котором вершины A, B и стороны AM_1B и AM_2B двуугольника AB переходят соответственно в вершины C, D и стороны CN_1D и CN_2D двуугольника CD.

252. Используя сферическое наложение, доказать, что множество всех точек пространства, через каждую из которых проходят три взаимно перпендикулярные касательные плоскости к данной сфере, совпадает с множеством всех точек некоторой сферы, концентрической данной.

253. Доказать, что если при сферическом наложении $\hat{f}$ три точки, не лежащие на одной большой окружности сферы, являются неподвижными точками, то $\hat{f}$ — тождественное преобразование сферы.

254. Доказать, что если при сферическом наложении две не диаметрально противоположные точки A и B являются неподвижными точками, то все точки большой окружности, проходящей через точки A и B, являются неподвижными точками.

255. Доказать, что при любом сферическом наложении $\hat{f}$ сферы существует хотя бы одна пара диаметрально противоположных точек A и B этой сферы таких, что либо $\hat{f}(A) = A$, $\hat{f}(B) = B$, либо $\hat{f}(A) = B$, $\hat{f}(B) = A$.

256. Доказать, что в сферическом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон, но больше их разности.

257. Доказать, что в сферическом треугольнике против равных углов лежат равные стороны и, обратно, против равных сторон лежат равные углы.

258. Доказать, что в сферическом треугольнике против большего угла лежит большая сторона и, обратно, против большей стороны лежит больший угол.

259. В сферическом треугольнике ABC угол A прямой. Доказать, что:

а) $\cos a = \cos b \cdot \cos c$ (сферическая теорема Пифагора);

б) $\cos \hat{B} = \sin \hat{C} \cdot \cos b$, $\cos \hat{C} = \sin \hat{B} \cdot \cos c$;

в) $\cos a = \operatorname{ctg} \hat{B} \cdot \operatorname{ctg} \hat{C}$;

г) $\sin c = \operatorname{ctg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} b$ и $\sin b = \operatorname{ctg} \hat{C} \cdot \operatorname{tg} c$;

д) $\cos \hat{B} = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} c$ и $\cos \hat{C} = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} b$.

Глава VI

ПРОСТЕЙШИЕ МНОГОГРАННИКИ

§ 26. МНОГОГРАННИКИ

1. Многогранная поверхность

Конечную систему многоугольников[1] $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, где $n > 1$, заданных в определенном порядке, назовем *цепочкой, соединяющей многоугольники* P_1 и P_n, если два смежных многоугольника (т. е. P_i и P_{i+1}, где $i = 1, 2, \dots, n - 1$) не лежат в одной плоскости и имеют общую сторону (связывающая сторона), а любые два несмежных многоугольника P_i и P_m, $i < m - 1$, $3 \leqslant m \leqslant n$, либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют только одну общую вершину, которая является концом всех связывающих сторон пар многоугольников P_i и P_{i+1}, P_{i+1} и P_{i+2}, ..., P_{m-1} и P_m.

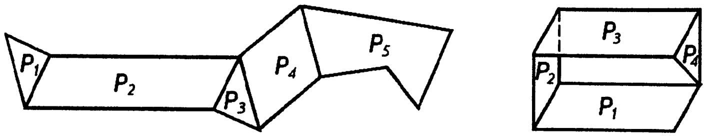
Наиболее простой цепочкой является система, состоящая из двух многоугольников. На рис. 37а изображена более сложная цепочка. Система многоугольников, изображенная на рис. 37б, не является цепочкой, соединяющей многоугольники P_1 и P_4, так как многоугольники P_1 и P_4 имеют общую вершину, которая не является вершиной многоугольников P_2 и P_3.

Замкнутой *многогранной поверхностью* или просто многогранной поверхностью называется фигура, образованная системой многоугольников, называемых *гранями*, расположенных в пространстве так, что: а) каждая сторона любой грани является стороной двух и только двух граней, не лежащих в одной плоскости; б) любые две грани можно соединить цепочкой, целиком состоящей из граней[2].

---

[1] Напомним, что в стереометрии многоугольником называют фигуру, состоящую из плоской простой замкнутой ломаной и области, состоящей из всех внутренних точек относительно этой ломаной (см. § 5, п. 1)

[2] В геометрии рассматривают также многогранные поверхности с границей (см., например [15], § 164), однако, в этом пособии такие многогранные поверхности не встречаются.



а) б)

РИС. 37

Примерами многогранных поверхностей являются тетраэдр и параллелепипед, рассмотренные нами в § 15, а также полная поверхность любой пирамиды или призмы, известные нам из курса средней школы. Любая замкнутая многогранная поверхность имеет не менее четырех граней. С другой стороны, предыдущие примеры показывают, что для любого натурального числа $n \geqslant 4$ существует замкнутая многогранная поверхность с n гранями.

2. Геометрическое тело

Напомним некоторые понятия, относящиеся к множествам точек пространства. Назовем *ε-окрестностью* данной точки A множество всех внутренних точек шара с центром A радиуса ε. Точка A непустого множества называется *внутренней точкой множества*, если существует хотя бы одна ε-окрестность точки A, целиком принадлежащая этому множеству. Точка называется *внешней точкой* относительно множества, если существует хотя бы одна ε-окрестность этой точки, ни одна точка которой не принадлежит множеству. Точка A называется *граничной точкой множества*, если любой ε-окрестности этой точки принадлежат как внутренние точки множества, так и внешние точки относительно этого множества. Граничная точка может принадлежать множеству, а может и не принадлежать ему. Множество всех граничных точек данного множества называется его *границей*.

Множество называется *открытым* множеством, если все его точки являются внутренними. Ясно, что ни одна из граничных точек открытого множества не принадлежит этому множеству. Отметим, что если $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ... , $\bar{F}_k$ — открытые множества, имеющие хотя бы одну общую точку, то их пересечение является открытым множеством.

Множество называется *выпуклым*, если все точки отрезка, соединяющего любые две точки множества, принадлежат этому множеству. Пустое множество и множество, содержащее одну точку, считаются выпуклыми. Отметим следующее свойство выпуклых множеств, доказательство которого читатель легко проведет самостоятельно: если $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_k$ — выпуклые множества, то их пересечение является выпуклым множеством.

Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат этому множеству. Примером связного множества является любое выпуклое множество, в частности, множество всех точек шара. *Областью* называется любое непустое открытое связное множество. Примером области является множество всех точек полупространства или множество всех внутренних точек шара.

Множество называется *ограниченным*, если существует такой шар, которому принадлежат все точки этого множества.

Имеют место следующие утверждения, доказательство которых предоставляем читателю: а) на любой ломаной, соединяющей внутреннюю точку области с внешней точкой относительно этой области, имеется хотя бы одна граничная точка данной области; б) на любом луче h, исходящем из внутренней точки M_0 ограниченной области, существует граничная точка G этой области такая, что все точки луча h, не принадлежащие отрезку M_0G, являются внешними относительно данной области.

Введем теперь следующее основное определение: *геометрическим телом* (или просто телом) называется фигура, множество всех точек которой есть объединение некоторой ограниченной области и ее границы. По свойству б) каждая ограниченная область имеет границу, с которой пересекается любой луч, исходящий из внутренней точки области. Поэтому геометрическое тело состоит из множества всех своих внутренних точек, которые образуют ограниченную область, и границы, состоящей из бесконечного множества точек. Граница геометрического тела называется также его поверхностью.

Примером геометрического тела является шар. Сфера, ограничивающая шар,— поверхность этого тела. Рассмотрим другой пример. Возьмем два концентрических шара и рассмотрим фигуру $\bar{F}$, точками которой являются те и только те точки шара большего радиуса, которые не являются внутренними точками шара меньшего радиуса. Фигура $\bar{F}$ является телом, поверхность которого состоит из двух сфер, ограничивающих исходные шары.

Сфера не является геометрическим телом, так как у нее нет внутренних точек. Открытый шар, т. е. фигура, состоящая из всех внутренних точек некоторого шара, также не является геометрическим телом, так как ему не принадлежит его граница. Далее, замкнутое полупространство не является телом, так как оно не является ограниченным.

3. Многогранник

Многогранником называется геометрическое тело, поверхностью которого является многогранная поверхность. Таким образом, многогранник $\bar{F}$ состоит из точек множества $\mathring{F}$ всех своих внутренних точек, которое является ограниченной областью, и его поверхности F, являющейся замкнутой многогранной поверхностью. Грани этой поверхности называют *гранями* многогранника $\bar{F}$, а вершины и стороны граней — соответственно *вершинами* и *ребрами* многогранника.

Многогранники классифицируются по числу граней. Простейшим является *тетраэдр* (четырехгранник). Далее встречаются названия: *пентаэдр* (пятигранник), *гексаэдр* (шестигранник), *октаэдр* (восьмигранник), *додекаэдр* (двенадцатигранник), *икосаэдр* (двадцатигранник).

Из определения многогранника, учитывая утверждения а) и б), сформулированные в п. 2, мы получаем следующие общие свойства многогранников:

1°. *Любые две внутренние точки многогранника можно соединить ломаной, целиком состоящей из внутренних точек.*

2°. *Любая ломаная, в частности отрезок, соединяющая внутреннюю точку многогранника с точкой* *внешней по отношению к нему, пересекает его поверхность по крайней мере в одной точке.*

3^0. *Какова бы ни была внутренняя точка многогранника, существует шар с центром в этой точке, внутри которого лежат все точки многогранника.*

4^0. *Любой луч, исходящий из внутренней точки многогранника, пересекает его поверхность по крайней мере в одной точке.*

5^0. *Любые две внешние точки относительно многогранника можно соединить ломаной, целиком состоящей из внешних точек.*

4. Об определении многогранника

Пусть дана произвольная замкнутая многогранная поверхность F. Возникает вопрос: существует ли многогранник с поверхностью F? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, доказательство которой сложно и выходит за рамки нашего курса: замкнутая многогранная поверхность F разбивает множество всех точек пространства, не принадлежащих поверхности F, на две области с общей границей F, причем одна из этих областей является ограниченной, а другая неограниченной (сравните с теоремой Жордана для многоугольников, § 23, п. 1 [7]).

Из этой теоремы следует важный вывод: какова бы ни была многогранная замкнутая поверхность, существует хотя бы один многогранник с поверхностью F. В дальнейшем изложении мы докажем это утверждение для наиболее важных частных случаев поверхностей F, в частности, для всех случаев, которые встречаются в школьном курсе геометрии.

Возникает другой вопрос, связанный с определением многогранника: существует ли единственный многогранник, поверхностью которого является данная многогранная поверхность? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Если F — произвольная замкнутая многогранная поверхность, то существует не более одного многогранника с поверхностью F.*

□ Доказательство проведем методом от противного, т. е. предположим, что существуют хотя бы два многогранника $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ с поверхностью F. Тогда существует хотя бы одна точка M, которая принадлежит одному многограннику и не принадлежит другому. Пусть, например, $M \in \overline{F}_1$, $M \notin \overline{F}_2$. Так как многогранники $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ имеют общую границу F, то $M \notin F$, поэтому M — внутренняя точка многогранника $\overline{F}_1$ и внешняя точка относительно многогранника $\overline{F}_2$.

Теперь возьмем некоторую точку N, внешнюю относительно многогранников $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Такая точка существует, так как по свойству 3^0 имеются два шара, содержащие соответственно многогранники $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, поэтому любую точку пространства, расположенную вне этих шаров, можно взять в качестве точки N.

По свойству 5^0 существует ломаная L, соединяющая точки M и N и целиком состоящая из внешних точек относительно $\overline{F}_2$. Следовательно, ломаная L не содержит ни одной точки поверхности F. С другой стороны, так как M — внутренняя точка, а N — внешняя точка относительно многогранника $\overline{F}_1$, то по свойству 2^0 ломаная L пересекает поверхность этого многогранника, т. е. поверхность F. Мы пришли к противоречию, следовательно, наше предположение неверно, поэтому существует не более одного многогранника с поверхностью F. ■

З а м е ч а н и е. По аналогии с многоугольником, нередко многогранником называют не геометрическое тело, поверхностью которого является замкнутая многогранная поверхность, а саму замкнутую многогранную поверхность. Так определяется, например, многогранник в Большой Советской Энциклопедии или в книге Д. И. Перепелкина «Курс элементарной геометрии» (см. [15], часть II, § 100). Также поступают иногда и в быту, когда склеивают из бумаги или картона разные многогранники — тетраэдр, куб, октаэдр и др. В ряде случаев в учебных пособиях и других книгах одновременно даются два определения многогранника; многогранник как замкнутая многогранная поверхность и многогранник как геометрическое тело, ограниченное замкнутой многогранной поверхностью (см., например, [2] § 21 или: О. В. Мантуров и др. «Толковый словарь математических терминов». М.: Просвещение, 1965). Отметим, наконец, что тетраэдр и параллелепипед, введенные нами в § 15, являются многогранными поверхностями.

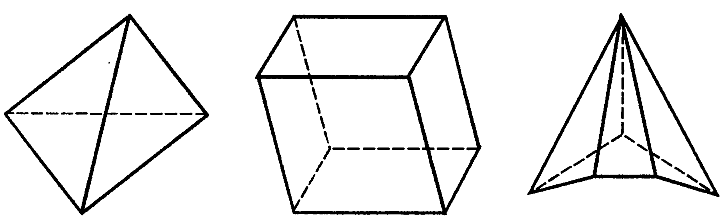
Из предыдущего изложения следует, что эти два определения многогранника по существу эквивалентны в том смысле, что если рассматривать многогранник как замкнутую многогранную поверхность, то существует единственный многогранник как геометрическое тело с данной поверхностью, и обратно. В этом пособии, следуя школьному курсу геометрии, под многогранником будем понимать геометрическое тело, ограниченное замкнутой многогранной поверхностью.

§ 27. ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК. ТЕТРАЭДР

1. Выпуклый многогранник

Следуя школьному определению, многогранник назовем *выпуклым*, если все его точки расположены в одном замкнутом полупространстве, границей которого является плоскость каждой грани. Эти полупространства называются *полупространствами данного выпуклого многогранника*, примером выпуклого многогранника является любой тетраэдр (рис. 38а). Однако многогранник, имеющий более чем четыре грани, может быть выпуклым или невыпуклым. Например, на рис. 38б изображен выпуклый шестигранник, а на рис. 38в — невыпуклый шестигранник.

Выпуклые многогранники являются важным частным случаем многогранников. Нетрудно доказать, что выпуклый многогранник есть выпуклая фигура (т. е. множество всех точек выпуклого многогранника является выпуклым множеством). Верно также



а) б) в)

Рис. 38

и обратное утверждение: если многогранник является выпуклой фигурой, то он — выпуклый многогранник.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что *все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками*. Однако обратное утверждение неверно, в чем легко убедиться, рассмотрев пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Полуплоскости любых двух смежных граней с общей границей выпуклого многогранника образуют двугранный угол, который называется *двугранным углом данного многогранника*. Число двугранных углов многогранника равно числу его ребер. Например, у тетраэдра шесть двугранных углов.

Докажем лемму, которая позволяет в каком-то смысле создать наглядное представление о выпуклом многограннике.

Лемма. *Любой луч h, исходящий из внутренней точки M_0 выпуклого многогранника $\overline{F}$, пересекает его поверхность F в одной и только одной точке G. Все точки, лежащие на отрезке M_0G, являются внутренними точками многогранника, а все точки луча h, не принадлежащие отрезку M_0G,— внешними точками относительно многогранника.*

□ Согласно свойству 4° § 26 на луче h имеется по крайней мере одна точка G поверхности F. Предположим, что на этом луче существует еще одна точка $M \in F$. Пусть для определенности $G - M - M_0$. Точка M принадлежит какой-то грани многогранника, а точка M_0 не лежит в плоскости β этой грани, поэтому точки G и M_0 лежат по разные стороны от плоскости β. Этот вывод противоречит условию леммы о том, что $\overline{F}$ — выпуклый многогранник. Следовательно, G — единственная точка поверхности F, принадлежащая лучу h.

По свойству б) п. 2 § 26 все точки луча h, не принадлежащие отрезку M_0G, являются внешними точками относительно многогранника $\overline{F}$. Остается доказать, что любая точка X, лежащая между M_0 и G, является внутренней точкой многогранника $\overline{F}$. По доказанному $X \notin F$. Если допустить, что X — внешняя точка относительно многогранника $\bar{F}$, то по свойству 2° § 26 отрезок XM_0 пересекает поверхность F, что противоречит уже доказанному утверждению о том, что луч h пересекает поверхность F только в одной точке. ■

Из доказанной леммы следует, что если M_0 — внутренняя точка выпуклого многогранника $\bar{F}$ с поверхностью F, то $\bar{F}$ образован всевозможными отрезками M_0X, где X — произвольная точка поверхности F.

Пусть S — сфера, которая является границей некоторого шара с центром M_0, внутри которого лежат все точки многогранника $\bar{F}$ (свойство 3° § 26). Любой луч, исходящий из точки M_0, пересекает в единственной точке поверхность F и в единственной точке сферу S. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное отображение множества точек поверхности F на множество точек сферы S. Более того, это отображение и обратное ему отображение являются непрерывными (в том смысле, что если расстояние между двумя переменными точками одной поверхности стремится к нулю, то расстояние между их образами также стремится к нулю). Говорят, что поверхности F и S топологически эквивалентны. Многогранник называется *простым*, если его поверхность топологически эквивалентна сфере. Итак, выпуклый многогранник является частным случаем простого многогранника.

2. Тетраэдр

В п. 3 § 15 было отмечено, что *тетраэдром* называется многогранник, имеющий четыре грани. Все четыре грани тетраэдра являются треугольниками. В самом деле, предположим, что хотя бы одна из граней тетраэдра $\bar{F}$ имеет более чем три стороны. Каждая из этих сторон является стороной еще одной грани многогранника $\bar{F}$, поэтому многогранник $\bar{F}$, кроме рассматриваемой грани, имеет по крайней мере еще четыре грани. Этот вывод противоречит определению тетраэдра. В § 15 было показано, что каковы бы ни были четыре точки A, B, C, D, не принадлежащие одной плоскости, существует тетраэдр с вершинами в этих точках, который обозначается через $ABCD$.

Этот же тетраэдр можно обозначить иначе, записав буквы A, B, C и D в другом порядке: $BACD$, $BCDA$, $DCAB$ и т. д.

Грань тетраэдра и вершина, не принадлежащая ей, называются *противоположными*. Ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, также называются *противоположными*.

Как следует из определения выпуклого многогранника, *произвольный тетраэдр является выпуклым многогранником*. Тетраэдр является одним из тех многогранников, которые встречаются в школьном курсе геометрии, особенно при решении задач. Рассмотрим некоторые свойства тетраэдра, которые широко используются при решении задач.

1^0. *Четыре отрезка, каждый из которых соединяет вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в одной точке, которая делит каждый из этих отрезков в отношении* $3:1$, *считая от вершины.*

□ Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения медиан соответственно граней BCD, ACD, ABD, ABC тетраэдра $ABCD$. Докажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в некоторой точке O и $AO:OA_1 = BO:OB_1 = CO:OC_1 = DO:OD_1 = 3:1$.

Сначала докажем, что $AO:OA_1 = BO:OB_1 = 3:1$. Отрезки AA_1 и BB_1 лежат в плоскости AMB, где M — середина ребра CD. Точка A_1 лежит на медиане BM треугольника BCD, и по свойству медиан $BA_1 : A_1M = 2:1$ (рис. 39). Аналогично, $AB_1 : B_1M = 2:1$.

В плоскости ABM рассмотрим треугольники ABM и B_1A_1M. Из соотношений $BA_1 : A_1M = AB_1 : B_1M = 2:1$ следует, что $MB : MA_1 = MA : MB_1 = 3:1$, поэтому треугольники ABM и B_1A_1M подобны по второму признаку подобия треугольников. Следовательно, $AB : B_1A_1 = 3:1$ и $AB \parallel A_1B_1$. Таким образом, ABA_1B_1 — трапеция, поэтому отрезки AA_1 и BB_1, которые являются ее диагоналями, пересекаются в некоторой точке O. Из

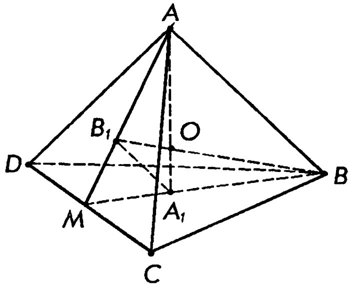


рис. 39

подобия треугольников AOB и A_1OB_1 следует, что $AO : OA_1 = BO : OB_1 = AB : A_1B_1 = 3 : 1$.

Аналогично, рассматривая пары отрезков AA_1 и CC_1, а также AA_1 и DD_1, получаем, что точка O лежит на отрезках CC_1 и DD_1 и $CO : OC_1 = DO : OD_1 = 3 : 1$. ■

2^0. *Середины отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, совпадают.*

□ Пусть M_1M_2, N_1N_2 и P_1P_2 — отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра $ABCD$ (рис. 40). Докажем сначала, что середины отрезков M_1M_2 и N_1N_2 совпадают. Отрезки M_1N_1 и M_2N_2 являются соответственно средними линиями треугольников ABC и DCB с общим основанием BC, следовательно, $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ и $M_1N_1 = M_2N_2$, поэтому четырехугольник $M_1N_1M_2N_2$ является параллелограммом. Диагонали M_1M_2 и N_1N_2 этого параллелограмма пересекаются в некоторой точке O и делятся в ней пополам. Аналогично, рассматривая отрезки M_1M_2 и P_1P_2, получаем, что точка O является серединой отрезка P_1P_2. ■

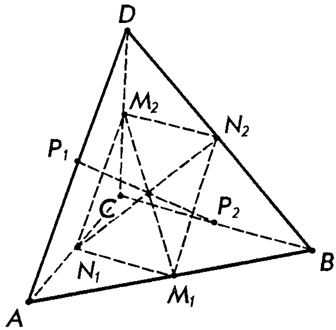


Рис. 40

Из этого свойства непосредственно следует утверждение:

3^0. *Шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра, пересекаются в одной точке.*

3. Высоты тетраэдра

Перпендикуляр, проведенный из вершины тетраэдра к плоскости противоположной грани, называется *высотой* тетраэдра. Тетраэдр имеет четыре высоты. Выясним взаимное расположение прямых, содержащих высоты тетраэдра.

Теорема. *Прямые, содержащие две высоты тетраэдра, пересекаются тогда и только тогда, когда ребро, из концов которого проведены эти высоты, перпендикулярно противоположному ребру.*

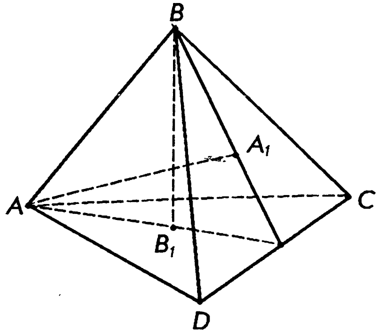


РИС. 41

□ Пусть AA_1 и BB_1 — две высоты тетраэдра $ABCD$. Так как $BB_1 \perp ACD$, то $BB_1 \perp CD$. Аналогично, $AA_1 \perp CD$ (рис. 41).

Предположим, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются. Тогда они лежат в одной плоскости, и по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая CD перпендикулярна к этой плоскости. Но прямая AB лежит в этой плоскости, поэтому $AB \perp CD$.

Обратно, пусть $CD \perp AB$. Так как $CD \perp BB_1$ и $CD \perp AA_1$, то $CD \perp ABB_1$, $CD \perp ABA_1$. Но через точку A проходит только одна плоскость, перпендикулярная к прямой CD, поэтому плоскости ABB_1 и ABA_1 совпадают, значит, прямая BB_1 лежит в плоскости ABA_1 и прямые AA_1 и BB_1 пересекаются. ■

Следствия:

1°. *Прямые, содержащие две высоты тетраэдра, пересекаются в точке P. Тогда прямые, содержащие две другие высоты, также пересекаются в некоторой точке*[1] *Q.*

2°. *Если прямые, содержащие четыре высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке, то противоположные ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны. Обратно, если две пары противоположных ребер тетраэдра перпендикулярны, то прямые, содержащие четыре высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке.*

3°. *Две пары противоположных ребер тетраэдра попарно перпендикулярны. Тогда и третья пара противоположных ребер тетраэдра перпендикулярна.*

Предлагаем читателю самостоятельно обосновать эти следствия.

---

[1] Заметим, что точка P может не совпадать с точкой Q. Например, в тетраэдре, изображенном на рис. 42, где $PD \perp PBC$, $PP_1 \perp BCD$, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника PBC, точки P и Q не совпадают.

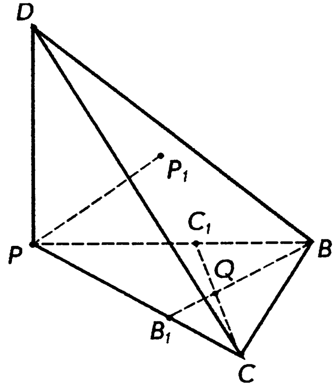


РИС. 42

§ 28. ОБОБЩЕННЫЙ ЦИЛИНДР И ОБОБЩЕННЫЙ КОНУС

1. Обобщенный цилиндр

Пусть $\overline{\omega}$ — многоугольник или круг, а $\overline{PP'}$ — ненулевой направленный отрезок, не параллельный плоскости фигуры $\overline{\omega}$. Из каждой точки X фигуры $\overline{\omega}$ проведем направленный отрезок $\overline{XY}$, равный отрезку $\overline{PP'}$. Фигуру $\overline{F}$, образованную этими отрезками, назовем *обобщенным цилиндром* (рис. 43а,б). Будем говорить, что обобщенный цилиндр задан фигурой $\overline{\omega}$ и отрезком $\overline{PP'}$.

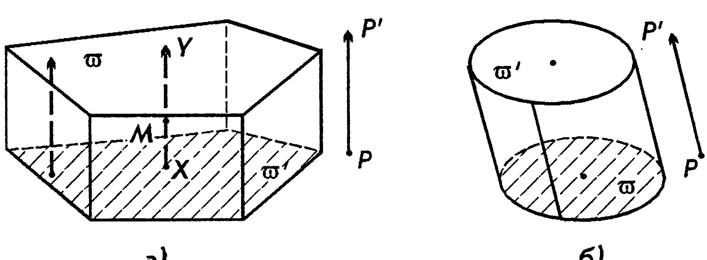


РИС. 43

Из этого определения следует, что обобщенный цилиндр $\bar{F}$ состоит из бесконечного множества равных друг другу направленных отрезков $\overline{XY}$, причем точками фигуры $\bar{F}$ являются те и только те точки пространства, каждая из которых принадлежит какому-нибудь из этих направленных отрезков. Концы всех направленных отрезков $\overline{XY}$, равных $\overline{PP'}$, начала которых принадлежат фигуре $\bar{\omega}$, образуют фигуру $\bar{\omega}'$, равную фигуре $\bar{\omega}$. В самом деле, $\bar{\omega}'$ является образом фигуры $\bar{\omega}$ при параллельном переносе на отрезок $\overline{PP'}$. Фигуры $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ называются *основаниями*, а перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется *высотой* обобщенного цилиндра $\bar{F}$.

Если начало X направленного отрезка $\overline{XY}$, равного $\overline{PP'}$, принадлежит границе основания $\bar{\omega}$, то ненаправленный отрезок XY называется *образующей* обобщенного цилиндра. Обобщенный цилиндр имеет бесконечное множество образующих. Фигура, состоящая из всех образующих, называется *боковой поверхностью* обобщенного цилиндра. *Полной поверхностью* обобщенного цилиндра называется фигура, состоящая из боковой поверхности и двух его оснований.

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 1. *Обобщенный цилиндр является геометрическим телом, поверхность которого совпадает с полной поверхностью этого цилиндра.*

□ Пусть обобщенный цилиндр $\bar{F}$ задан основанием $\bar{\omega}$ и направленным отрезком $\overline{PP'}$. Обозначим через $\mathring{\bar{F}}$ множество всех точек фигуры $\bar{F}$, не принадлежащих ее полной поверхности F, а через F_0 — множество всех точек фигуры F. Следует доказать, что а) множество $\mathring{\bar{F}}$ является ограниченной областью; б) множество F_0 есть граница множества $\mathring{\bar{F}}$.

а) Докажем, что $\mathring{\bar{F}}$ есть непустое, ограниченное, открытое, связное множество. Из определения обобщенного цилиндра следует, что $\mathring{\bar{F}} \neq \varnothing$. Множество $\mathring{\bar{F}}$ является ограниченным, так как все его точки принадлежат, например, какому-нибудь шару, внутри которого лежат основания $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ обобщенного цилиндра $\bar{F}$.

Докажем, что $\hat{\bar{F}}$ — открытое множество, т. е. любая точка $M \in \hat{\bar{F}}$ является внутренней точкой этого множества. Рассмотрим направленный отрезок $\overline{XY}$, равный $\overline{PP'}$, на котором лежит точка M (см. рис. 43а). Так как $M \notin F$, то отрезок XY не является образующей и точка M не совпадает с точками X и Y. Рассмотрим ε-окрестность точки M, где ε меньше, чем расстояния от точки M до плоскостей оснований $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ до любой образующей обобщенного цилиндра $\bar{F}$. Ясно, что все точки этой окрестности точки M принадлежат множеству $\hat{\bar{F}}$, т. е. M — внутренняя точка этого множества.

Докажем теперь, что $\hat{\bar{F}}$ — связное множество. Пусть A_0 и B_0 — две произвольные точки множества $\hat{\bar{F}}$, а $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$ — направленные отрезки, равные $\overline{PP'}$, которым принадлежат эти точки, $A \in \bar{\omega}$, $B \in \bar{\omega}$. Так как $A_0 \notin F$ и $B_0 \notin F$, то точка A_0 не совпадает с точками A и A', и точка B_0 — с точками B и B', и, кроме того, A и B — внутренние точки фигуры $\bar{\omega}$. Поэтому существует ломаная $AP_1P_2 \dots P_kB$, целиком состоящая из внутренних точек фигуры $\bar{\omega}$. При параллельном переносе на отрезок $\overline{AA_0}$ эта ломаная переходит в ломаную $A_0P_1'P_2' \dots P_k'B_0'$, целиком состоящую из точек множества $\hat{\bar{F}}$. Тогда, очевидно, ломаная $A_0P_1'P_2' \dots P_k'B_0'B_0$ целиком состоит из точек множества $\hat{\bar{F}}$ и соединяет точки A_0 и B_0 (если точки B_0' и B_0 совпадают, то звено $B_0'B_0$ этой ломаной следует заменить точкой B_0). Таким образом, $\hat{\bar{F}}$ — ограниченная область.

б) Докажем, что множество F_0 — граница области $\hat{\bar{F}}$. Для этого заметим, что если $M \in F_0$, то M — граничная точка множества $\hat{\bar{F}}$. В самом деле, так как $M \in F_0$, то $M \notin \hat{\bar{F}}$, и в любой окрестности точки M имеются точки множества $\hat{\bar{F}}$. Следовательно, в любой окрестности точки M имеются как внутренние точки множества $\hat{\bar{F}}$, так и внешние точки относительно $\hat{\bar{F}}$.

С другой стороны, любая граничная точка N множества $\mathring{\overline{F}}$ не может быть внешней точкой относительно обобщенного цилиндра $\overline{F}$, поэтому $N \in \overline{F}$. Но $N \notin \mathring{\overline{F}}$, следовательно, $N \in F_0$. ■

2. Обобщенный конус

Пусть $\overline{\omega}$ — многоугольник или круг, а O — точка, не лежащая в плоскости фигуры $\overline{\omega}$. Каждую точку фигуры $\overline{\omega}$ соединим отрезком с точкой O. Фигуру $\overline{F}$, образованную этими отрезками, назовем *обобщенным конусом* (рис. 44а,б). Точками обобщенного конуса $\overline{F}$ являются те и только те точки пространства, каждая из которых принадлежит какому-нибудь отрезку XO, где X — произвольная точка фигуры $\overline{\omega}$. Фигура $\overline{\omega}$ называется *основанием*, точка O — *вершиной*, а перпендикуляр, проведенный из точки O к плоскости основания,— *высотой* обобщенного конуса $\overline{F}$.

Если точка X лежит на границе $\overline{\omega}$, то отрезок XO называется *образующей* обобщенного конуса (см. рис. 44а,б). Обобщенный конус имеет бесконечное множество образующих. Фигура, состоящая из всех этих образующих, называется *боковой поверхностью* обобщенного конуса. *Полной поверхностью* обобщенного конуса называется фигура, состоящая из боковой поверхности и основания.

Имеет место следующая теорема, доказательство

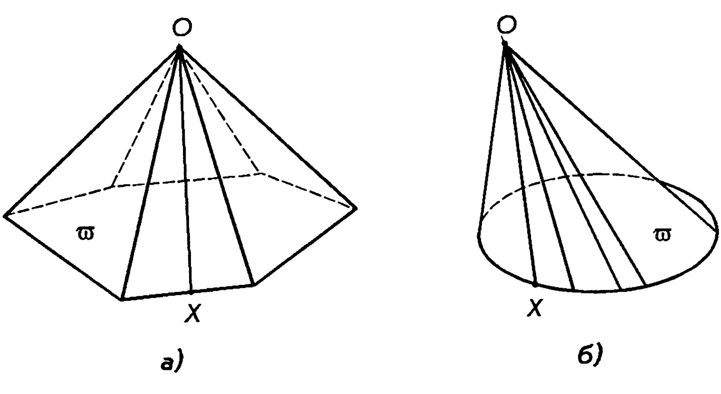


РИС. 44

которой мы опускаем, так как оно, по существу, совпадает с доказательством теоремы 1.

Теорема 2. *Обобщенный конус является геометрическим телом, поверхность которого совпадает с полной поверхностью этого конуса.*

3. Равенство обобщенных цилиндров и конусов

Согласно общему определению равенства фигур два обобщенных цилиндра или конуса называются равными, если существует наложение, при котором один из них переходит в другой. Рассмотрим признаки равенства обобщенных цилиндров и конусов.

1°. *Обобщенный цилиндр $\bar{F}_1$, заданный основанием $\bar{\omega}_1$ и отрезком $\overline{P_1Q_1}$, равен обобщенному цилиндру $\bar{F}_2$, заданному основанием $\bar{\omega}_2$ и отрезком $\overline{P_2Q_2}$, если существует наложение f такое, что $\bar{\omega}_2 = f(\bar{\omega}_1)$, $P_2 = f(P_1)$, $Q_2 = f(Q_1)$.*

□ Докажем, что $\bar{F}_2 = f(\bar{F}_1)$. Для этого сначала докажем, что образ M' произвольной точки M фигуры $\bar{F}_1$ принадлежит фигуре $\bar{F}_2$. Точка M принадлежит какому-нибудь направленному отрезку $\overline{XY}$, равному отрезку $\overline{P_1Q_1}$, $X \in \bar{\omega}_1$. Если $X' = f(X)$, $Y' = f(Y)$, то, очевидно, точка M' принадлежит отрезку $X'Y'$, а т. к. $f(\bar{\omega}_1) = \bar{\omega}_2$, то $X' \in \bar{\omega}_2$. Так как при наложении $\overline{XY} \mapsto \overline{X'Y'}$, $\overline{P_1Q_1} \to \overline{P_2Q_2}$, и равные отрезки переходят в равные отрезки, то $\overline{X'Y'} = \overline{P_2Q_2}$. Таким образом, отрезок $\overline{X'Y'}$ принадлежит обобщенному цилиндру $\bar{F}_2$, поэтому $M' \in \bar{F}_2$.

Докажем теперь, что прообраз N произвольной точки N' фигуры $\bar{F}_2$ принадлежит $\bar{F}_1$. Для этого рассмотрим направленный отрезок $\overline{X'Y'}$, равный $\overline{P_2Q_2}$, $X' \in \bar{\omega}_2$, которому принадлежит точка N'. Если X и Y — прообразы точек X' и Y', то точка N принадлежит отрезку $\overline{XY}$. По аналогии с предыдущим получаем: $\overline{XY} = \overline{P_1Q_1}$ и $X \in \bar{\omega}_1$, поэтому $N \in \bar{F}_1$. Итак, $\bar{F}_2 = f(\bar{F}_1)$, следовательно, $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$. ■

Точно так же доказывается следующий признак равенства обобщенных конусов.

2°. *Обобщенный конус $\bar{F}_1$ с основанием $\bar{\omega}_1$ и верши-*

ной O_1 равен обобщенному конусу $\bar{F}_2$ с основанием $\bar{\omega}_2$ и вершиной O_2, если существует наложение f такое, что $\bar{\omega}_2 = f(\bar{\omega}_1)$, $O_2 = f(O_1)$.

§ 29. ПРИЗМА. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

1. Определение призмы

Призмой называется обобщенный цилиндр, основаниями которого являются многоугольники (см. рис. 43а). Основания, образующие, высота, боковая и полная поверхности обобщенного цилиндра называются соответственно основаниями, образующими, высотой, боковой и полной поверхностями призмы. Каждое основание призмы есть образ другого основания при некотором параллельном переносе, поэтому основания призмы являются равными друг другу одноименными многоугольниками с соответственно параллельными сторонами, плоскости которых параллельны. Образующие, соединяющие вершины оснований, называются *боковыми ребрами* призмы. Ясно, что боковые ребра призмы попарно параллельны и равны.

Призма называется *n-угольной*, если ее основания — n-угольники. Такая призма имеет n боковых ребер. Призма с основаниями $A_1 A_2 \dots A_n$ *и* $B_1 B_2 \dots B_n$ и боковыми ребрами A_1B_1, A_2B_2, ... , A_nB_n обозначается так: $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$. Если боковые ребра призмы перпендикулярны к плоскостям оснований, то призма называется *прямой*, в противном случае — *наклонной*. Ясно, что любое боковое ребро прямой призмы является ее высотой.

Боковая поверхность призмы $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ состоит из параллелограммов: $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ... , $A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n$, $A_nB_nB_1A_1$, которые называются *боковыми гранями* призмы. Полная поверхность призмы — это фигура, образованная боковыми гранями и основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$. Она является замкнутой многогранной поверхностью. Поэтому, учитывая теорему 1 § 28, мы приходим к важному выводу: любая *n-угольная призма является многогранником, число граней которого равно* $n + 2$.

Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней, а *площадью поверхности* призмы — сумма площадей ее боковых граней и оснований.

Пусть плоскость α перпендикулярна к боковым ребрам n-угольной призмы и пересекает все эти ребра или их продолжения соответственно в точках C_1, C_2, ... , C_n. Многоугольник $C_1C_2 \dots C_n$ называется *перпендикулярным сечением* призмы. Ясно, что стороны этого многоугольника являются высотами боковых граней, поэтому *площадь боковой поверхности призмы равна произведению длины бокового ребра на периметр перпендикулярного сечения.*

Для прямой призмы любое перпендикулярное сечение равно основаниям призмы, следовательно, *площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению длины бокового ребра на периметр основания.*

2. Выпуклая призма

Призма называется *выпуклой*, если она является выпуклым многогранником. Докажем теорему, выражающую необходимый и достаточный признаки выпуклости призмы.

Теорема 1. *Призма является выпуклой тогда и только тогда, когда одно из ее оснований — выпуклый многоугольник.*

□ Пусть $\overline{F}$ — данная n-угольная призма, α и α' — параллельные плоскости оснований $\overline{P}$ и $\overline{P}'$, а γ_i — плоскость произвольной боковой грани ($i = 1, 2, \dots, n$), которая пересекает плоскость α по прямой p_i (рис. 45). Ясно, что прямые $p_1, p_2, \dots, p_n$ содержат соответственно все стороны многоугольника $\overline{P}$.

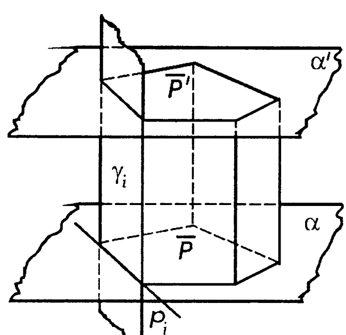


РИС. 45

Докажем сначала, что если $\overline{F}$ — выпуклая призма, то $\overline{P}$ — выпуклый многоугольник. По определению все точки призмы $\overline{F}$ расположены в одном замкнутом полупространстве Ω_i с границей

γ_i, поэтому $\bar{P} \in \Omega_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Отсюда следует, что в плоскости α все точки многоугольника $\bar{P}$ расположены в одной замкнутой полуплоскости с границей p_i. Так как p_i — прямая, содержащая произвольную сторону многоугольника $\bar{P}$, то $\bar{P}$ — выпуклый многоугольник.

Докажем теперь, что если $\bar{P}$ — выпуклый многоугольник, то $\bar{F}$ — выпуклая призма. По определению выпуклого многоугольника все точки многоугольника $\bar{P}$ в плоскости α лежат в одной замкнутой полуплоскости с границей p_i, при $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через Ω_i замкнутое полупространство с границей γ_i, содержащее эту полуплоскость. Из определения призмы следует, что $\bar{F} \subset \Omega_i$. С другой стороны, ясно, что $\bar{F} \subset \Omega$ и $\bar{F} \subset \Omega'$, где Ω и Ω' — замкнутые полупространства с границами α и α', содержащие соответственно плоскости α' и α (см. рис. 45). Отсюда следует, что $\bar{F}$ — выпуклая призма. ■

Замечание. Основания призмы равны друг другу, поэтому из доказанной теоремы следует, что у выпуклой призмы оба основания — выпуклые многоугольники. Учитывая, что боковые грани призмы — параллелограммы, мы приходим к утверждению: все грани выпуклой призмы являются выпуклыми многоугольниками.

3. Правильная призма

Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники. Из теоремы 1 следует, что *правильная призма является выпуклой*. Отрезок, соединяющий центры оснований правильной призмы, является высотой этой призмы.

Докажем теорему о равенстве правильных призм.

Теорема 2. *Две правильные n-угольные призмы равны, если у них соответствено равны стороны оснований и боковые ребра.*

□ Пусть $\bar{F} = A_1A_2 \ldots A_nB_1B_2 \ldots B_n$ и $\bar{F}' = A_1'A_2' \ldots A_n'B_1'B_2' \ldots B_n'$ — данные призмы, $\omega = A_1A_2 \ldots A_n$ и $\omega' = A_1'A_2' \ldots A_n'$ — их основания, O_1 и O_1' — центры этих оснований, O_2 и O_2' — центры параллельных им оснований (рис. 46). По условию теоремы стороны ос-

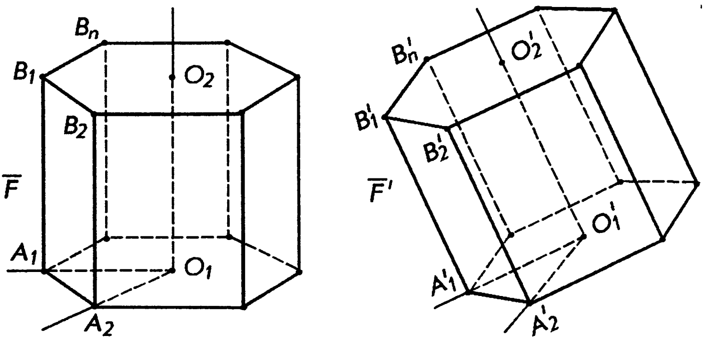


РИС. 46

нований $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$, которые являются правильными n-угольниками, равны, поэтому $\bar{\omega} = \bar{\omega}'$. Далее, так как $A_1B_1 = A_1'B_1'$, то $O_1O_2 = O_1'O_2'$. Призму $\bar{F}$ зададим основанием $\bar{\omega}$ и отрезком $\overline{O_1O_2}$, а призму $\bar{F}'$ — основанием $\bar{\omega}'$ и отрезком $\overline{O_1'O_2'}$.

По теореме § 22 трехгранные углы $O_1A_1A_2O_2$ и $O_1'A_1'A_2'O_2'$ равны (см. рис. 46), поэтому существует наложение f, при котором точка O_1 переходит в точку O_1', а лучи O_1A_1, O_1A_2, O_1O_2 — соответственно в лучи $O_1'A_1'$, $O_1'A_2'$, $O_1'O_2'$. Так как $O_1A_1 = O_1'A_1'$, $O_1A_2 = O_1'A_2'$, $O_1O_2 = O_1'O_2'$, то точки A_1, A_2, O_2 переходят соответственно в точки A_1', A_2', O_2'. Следовательно, при наложении f плоскость $A_1A_2O_1$ переходит в плоскость $A_1'A_2'O_1'$. Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $A_1'A_2' \ldots A_n'$ являются правильными многоугольниками с центрами O_1 и O_1', поэтому при наложении f точки $A_3, A_4, \ldots, A_n$ переходят соответственно в точки $A_3', A_4', \ldots, A_n'$, т. е. $f(\bar{\omega}) = \bar{\omega}'$.

Итак, $\bar{\omega}' = f(\bar{\omega})$, $O_1' = f(O_1)$, $O_2' = f(O_2)$. По признаку равенства обобщенных цилиндров (п. 3 § 28) $\bar{F} = \bar{F}'$. ■

4. Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма $\bar{F}$, основанием которой является параллелограмм (см. рис. 38б). Параллелепипед имеет восемь вершин, двенадцать ребер и шесть граней. Все грани параллелепипеда — параллелограммы[1].

Отрезок, соединяющий вершину одного из оснований параллелепипеда с вершиной другого основания и не лежащий ни в одной боковой грани, называется *диагональю* параллелепипеда. Параллелепипед имеет четыре диагонали. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются *смежными*, а две грани, не имеющие общих ребер,— *противоположными*.

Поскольку основания параллелепипеда являются выпуклыми четырехугольниками, то по теореме 1 параллелепипед — *выпуклый многогранник*.

Предлагаем читателю, по аналогии с доказательством теоремы 2, доказать следующую теорему, в которой выражен признак равенства параллелепипедов.

Теорема 3. *Если три ребра с общей вершиной одного параллелепипеда соответственно равны трем ребрам с общей вершиной другого параллелепипеда и соответствующие углы, заключенные между этими ребрами, попарно равны, то такие параллелепипеды равны.*

Параллелепипед называется *прямым*, если его боковые ребра перпендикулярны к плоскостям оснований. Прямой параллелепипед называется *прямоугольным*, если его основания являются прямоугольниками (см. п. 3 § 15). Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, называются его *измерениями*.

Прямоугольный параллелепипед обладает всеми свойствами произвольного параллелепипеда. Кроме того, в прямоугольном параллелепипеде все грани являются прямоугольниками, каждые три ребра с общей вершиной попарно взаимно перпендикулярны.

Докажем теорему, которая часто называется теоремой Пифагора в пространстве.

Теорема 4. *Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его ребер с общей вершиной.*

□ Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

---

[1] Это определение параллелепипеда не совпадает с тем определением, которое дано в п. 2 § 15. Там параллелепипедом мы назвали полную поверхность F многогранника F. Однако, как было отмечено в п. 4 § 26, эти два определения по существу эквивалентны.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ и докажем, что $AB^2 + AD^2 + AA_1^2 = AC_1^2$. Применив теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам ABC и ACC_1, получим: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$. Сложив эти равенства, получаем: $AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$. Отсюда, учитывая, что $BC = AD$ и $CC_1 = AA_1$, приходим к искомому равенству. ■

Следствие. *Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны друг другу.*

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется *кубом*. Куб обладает всеми свойствами прямоугольного параллелепипеда. Кроме того, легко доказать, что в кубе все грани являются равными квадратами, все ребра равны друг другу, точка пересечения диагоналей равноудалена от всех вершин, от всех граней, а также от всех ребер.

Из теоремы 3 непосредственно следует, что если три измерения прямоугольного параллелепипеда соответственно равны трем измерениям другого прямоугольного параллелепипеда, то такие прямоугольные параллелепипеды равны.

§ 30. ПИРАМИДА

1. Определение пирамиды

Пирамидой называется обобщенный конус, основанием которого является многоугольник. Основание, вершина, высота, боковая и полная поверхности обобщенного конуса называются соответственно основанием, вершиной, высотой, боковой и полной поверхностями пирамиды. Образующие, соединяющие вершины основания с вершиной пирамиды, называются *боковыми ребрами* пирамиды.

Пирамида называется *n-угольной*, если ее основание — n-угольник. Такая пирамида имеет n боковых ребер. Пирамида с основанием $A_1A_2 \ldots A_n$ и вершиной S обозначается так: $SA_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 47).

Боковая поверхность пирамиды $SA_1A_2 \ldots A_n$ состоит из треугольников A_1A_2S, A_2A_3S, ... , $A_{n-1}A_nS$, A_nA_1S, которые называются *боковыми гранями* пирамиды. Полная поверхность пирамиды $SA_1A_2 \ldots A_n$ — это фигура, образованная этими треугольниками и многоуголь-

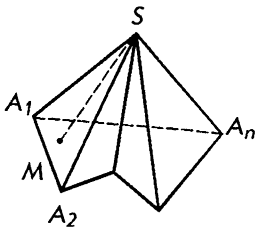


РИС. 47

ником $A_1A_2 \dots A_n$. Она является замкнутой многогранной поверхностью. Отсюда, учитывая теорему 2 § 28, мы приходим к важному выводу: *любая n-угольная пирамида является многогранником, число граней которого равно* $n + 1$.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней, а *площадью поверхности пирамиды* — сумма площадей всех ее граней.

2. Правильная пирамида

Пирамида называется *выпуклой*, если она является выпуклым многогранником. По аналогии с доказательством теоремы 1 § 29 можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пирамида является выпуклой тогда и только тогда, когда ее основание — выпуклый многоугольник.*

Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник и основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (рис. 48). По теореме 1 *правильная пирамида является выпуклым многогранником.*

Из определения правильной пирамиды непосредственно следует, что все боковые ребра равны и образуют с плоскостью основания равные углы; боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками, причем их плоскости образуют с плоскостью основания равные углы.

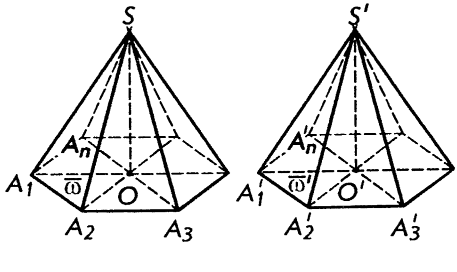


РИС. 48

Апофемой правильной пирамиды называется высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды. Нетрудно доказать следующие утверждения:

1^0. *Плоскость, проходящая через высоту правильной пирамиды и ее апофему, перпендикулярна к плоскости боковой грани, содержащей эту апофему.*

2^0. *Три перпендикуляра, каждый из которых проведен из некоторой вершины основания правильной треугольной пирамиды на плоскость боковой грани, не содержащей эту вершину, равны, и их основания лежат на прямых, содержащих апофемы соответствующих граней.*

Докажем теорему о равенстве правильных пирамид.

Теорема 2. *Две правильные n-угольные пирамиды с равными сторонами оснований равны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) их высоты равны; б) их боковые ребра равны.*

□ Пусть $\bar{F}_1 = SA_1A_2 \ldots A_n$ и $\bar{F}_2 = S'A_1'A_2' \ldots A_n'$ — две правильные n-угольные пирамиды с высотами SO и $S'O'$.

а) По условию теоремы стороны A_1A_2 и $A_1'A_2'$ оснований $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$, которые являются правильными n-угольниками, равны, поэтому $\bar{\omega} = \bar{\omega}'$. По теореме § 22 трехгранные углы OA_1A_2S и $O'A_1'A_2'S'$ равны (см. рис. 48), поэтому существует наложение f, при котором точка O переходит в точку O', а лучи OA_1, OA_2, OS — соответственно в лучи $O'A_1'$, $O'A_2'$, $O'S'$. Так как $OA_1 = O'A_1'$, $OA_2 = O'A_2'$, $OS = O'S'$, то точки A_1, A_2, S переходят соответственно в точки A_1', A_2', S'. Следовательно, при наложении f плоскость A_1A_2O переходит в плоскость $A_1'A_2'O'$. Так как $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ — правильные многоугольники с центрами O и O', то при наложении f многоугольник $\bar{\omega}$ переходит в многоугольник $\bar{\omega}'$. Итак, $\bar{\omega}' = f(\bar{\omega})$, $O' = f(O)$, $S' = f(S)$. По признаку равенства обобщенных конусов (п. 3 § 28) $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$.

б) По условию $A_1A_2 = A_1'A_2'$ и $SA_1 = S'A_1'$, поэтому прямоугольные треугольники SOA_1 и $S'O'A_1'$ равны по гипотенузам SA_1 и $S'A_1'$ и катетам OA_1 и $O'A_1'$. Следовательно, высоты SO и $S'O'$ пирамид $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ равны, и по доказанному данные пирамиды равны. ■

Следствие. *Две правильные треугольные пирамиды равны, если боковое ребро и угол между боковыми ребрами одной пирамиды соответственно равны боковому ребру и углу между боковыми ребрами другой.*

3. Треугольная пирамида. Правильный тетраэдр

Треугольная пирамида является многогранником, имеющим четыре грани, т. е. является тетраэдром. Докажем обратное утверждение: произвольный тетраэдр $\bar{F}$ является треугольной пирамидой, причем основанием пирамиды может служить любая грань тетраэдра $\bar{F}$, а вершиной — противоположная вершина. В самом деле, пусть ABC — одна из граней тетраэдра $\bar{F}$, а D — противоположная вершина. Треугольная пирамида $DABC$, которая является многогранником, имеет те же грани, что и тетраэдр $\bar{F}$, поэтому поверхности многогранников $DABC$ и $\bar{F}$ совпадают. По теореме § 26 эти многогранники совпадают, т. е. $\bar{F}$ — треугольная пирамида с основанием ABC и вершиной D.

Предлагаем читателю доказать следующую теорему, в которой выражен признак равенства треугольных пирамид. Эта теорема аналогична теореме 3 § 29.

Теорема 3. *Если три боковых ребра треугольной пирамиды соответственно равны трем боковым ребрам другой пирамиды и углы, заключенные между соответствующими боковыми ребрами, попарно равны, то такие треугольные пирамиды равны.*

Следствие. *Если три ребра с общей вершиной одного тетраэдра соответственно равны трем ребрам с общей вершиной другогс тетраэдра и углы, заключенные между соответствующими ребрами этих тетраэдров, попарно равны, то такие тетраэдры равны.*

Из предыдущего изложения ясно, что тетраэдр, у которого одна грань является правильным треугольником, а ребра, отличные от ребер этой грани, равны друг другу, есть правильная треугольная пирамида. Легко доказать, что *в правильной треугольной пира-*

миде любые два противоположных ребра перпендикулярны.

Напомним, что тетраэдр называется правильным, если все шесть его ребер равны друг другу (см. п. 1 § 15). Очевидно, что все его грани являются правильными треугольниками.

Правильный тетраэдр является частным видом тетраэдра и правильной треугольной пирамиды. В частности, в правильном тетраэдре противоположные ребра взаимно перпендикулярны; его высоты равны друг другу и пересекаются в одной точке. Далее, из следствия предыдущей теоремы следует, что два правильных тетраэдра равны, если ребро одного тетраэдра равно ребру другого.

§ 31. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

1. Определение усеченной пирамиды

Рассмотрим произвольную n-угольную пирамиду $SA_1A_2 \ldots A_n$ и через некоторую точку, лежащую на каком-нибудь боковом ребре, проведем плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды. Точка S и все вершины основания пирамиды лежат по разные стороны от плоскости β, поэтому плоскость β пересекает каждое из боковых ребер SA_1, SA_2, ... , SA_n пирамиды в точках, которые обозначим соответственно через B_1, B_2, B_3, ... , B_n. При гомотетии с центром S и коэффициентом $m = \frac{SB_1}{SA_1}$, как нетрудно видеть, многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ переходит в подобный ему многоугольник $B_1B_2 \ldots B_n$, стороны которого соответственно параллельны сторонам многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$.

Фигура, образованная пересечением данной пирамиды и замкнутого полупространства с границей β, содержащего плоскость α, называется *усеченной n-угольной пирамидой* и обозначается так: $A_1A_2 \ldots A_nB_1B_2 \ldots B_n$ (рис. 49). Будем говорить, что эта усеченная пирамида получена сечением пирамиды $SA_1A_2 \ldots A_n$ плоскостью β.

Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ называются *основаниями*, трапеции $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ... , $A_nB_nB_1A_1$ — боковыми гранями, а отрезки A_1B_1, A_2B_2,

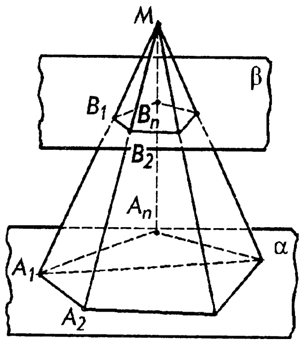


РИС. 49

..., A_nB_n — *боковыми ребрами* этой усеченной пирамиды. Из определения усеченной пирамиды следует, что прямые, содержащие боковые ребра, пересекаются в одной точке.

Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания усеченной пирамиды к плоскости другого основания, называется ее *высотой*. Так как плоскости оснований усеченной пирамиды параллельны, то все ее высоты равны.

Фигура, образованная из всех боковых граней усеченной пирамиды, называется ее *боковой поверхностью*, а фигура, образованная из всех боковых граней и двух оснований,— *полной поверхностью усеченной пирамиды*.

Пусть $\bar{F}$ — усеченная пирамида, полученная сечением пирамиды $SA_1A_2 \dots A_n$ некоторой плоскостью. Сформулируем утверждение, которое, как нетрудно видеть, эквивалентно определению усеченной пирамиды: усеченная пирамида есть фигура, образованная всеми отрезками, каждый из которых принадлежит прямой, проходящей через точку S, и соединяет любую точку основания $A_1A_2 \dots A_n$ с некоторой точкой другого основания. Заметим, что это утверждение, которое также можно считать определением усеченной пирамиды, совершенно аналогично определению обобщенного цилиндра, в частности, призмы. Поэтому отдельные свойства обобщенного цилиндра и призмы, рассмотренные выше, имеют место и для усеченной пирамиды. Сформулируем прежде всего теорему, доказательство которой мы опускаем, так как оно почти полностью совпадает с доказательством теоремы 1 § 28.

Теорема 1. *Усеченная пирамида есть геометрическое тело, поверхностью которого является полная поверхность этой усеченной пирамиды.*

Из этой теоремы, учитывая, что полная поверхность усеченной пирамиды есть замкнутая многогранная поверхность, мы приходим к важному выводу: *любая n-угольная усеченная пирамида является многогранником, число граней которого равно $n + 2$.*

2. Правильная усеченная пирамида

Усеченная пирамида называется *выпуклой*, если она является выпуклым многогранником. Имеет место следующая теорема, выражающая необходимый и достаточный признак выпуклости усеченной пирамиды.

Теорема 2. *Усеченная пирамида является выпуклой тогда и только тогда, когда одно из ее оснований — выпуклый многоугольник.*

Доказательство этой теоремы мы опускаем, так как оно в точности совпадает с доказательством теоремы 1 § 29.

Основания усеченной пирамиды являются подобными фигурами, поэтому если одно основание — правильный n-угольник, то и другое основание — правильный n-угольник. Усеченная пирамида называется *правильной*, если ее основания являются правильными n-угольниками и отрезок, соединяющий их центры, является высотой усеченной пирамиды. Из этого определения следует, что правильная усеченная пирамида получается сечением правильной пирамиды произвольной плоскостью, пересекающей ее боковые ребра. Далее, по теореме 2 *правильная усеченная пирамида является выпуклым многогранником.*

Из определения правильной усеченной пирамиды непосредственно следует, что все ее боковые ребра равны и образуют с плоскостью каждого основания равные углы; все боковые грани являются равными равнобедренными трапециями и их плоскости составляют с плоскостями оснований равные углы.

Апофемой правильной усеченной пирамиды называется отрезок, соединяющий середины параллельных сторон боковой грани. Нетрудно доказать, что *апофема правильной усеченной пирамиды и отрезок, соединяющий центры ее оснований, лежат в одной плоскости, перпендикулярной к плоскости грани, содержащей эту апофему.*

Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней, а *площадью поверхности* усеченной пирамиды — сумма площадей ее боковых граней и оснований. Так как все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные трапеции, то *площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.*

В заключение отметим, что площадь S поверхности правильной усеченной пирамиды вычисляется по формуле:

$$S = \frac{n(a^2 + b^2)}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} + \frac{(a + b)dn}{2}.$$

Здесь n — число сторон основания, a, b и d — соответственно стороны оснований и апофема данной усеченной пирамиды.

3. Теорема Эйлера

Эйлеровой характеристикой многогранника называется число $e - k + f$, где e, k и f — числа вершин, ребер и граней многогранника.

Теорема 3. *Эйлерова характеристика призмы, пирамиды и усеченной пирамиды равна двум.*

□ Пусть $\bar{F}$ — данная n-угольная призма, пирамида или усеченная пирамида. Доказательство теоремы сводится к простому подсчету чисел e, k и f каждого многогранника. Подсчитаем, например, эти числа для призмы. Вершинами призмы являются вершины двух ее оснований, поэтому $e = 2n$. Ребрами призмы являются стороны двух оснований, т. е. $2n$ отрезков и n боковых ребер, поэтому $k = 3n$. Ясно, что призма имеет n боковых граней и два основания, следовательно, $f = n + 2$. Таким образом, $e - k + f = 2n - 3n + (n + 2) = 2$.

Аналогично убеждаемся в том, что теорема верна для пирамиды и для усеченной пирамиды. ■

Замечание. Аналогичная теорема (теорема Эйлера) верна для значительно более широкого класса многогранников, которые в § 27 мы назвали простыми многогранниками. Призма, пирамида, усеченная пирамида являются частными видами простых многогранников. Теорема Эйлера формулируется так: эйлерова характеристика любого простого многогранника равна двум (см. [15] § 165 или [6] часть II, § 45).

§ 32. СЕЧЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

1. Сечение многогранника

Плоскость называется *секущей плоскостью* многогранника, если в этой плоскости лежит хотя бы одна внутренняя точка многогранника. Нетрудно доказать, что это определение совпадает со следующим определением секущей плоскости, которое дается в курсах геометрии средней школы: плоскость называется секущей плоскостью многогранника, если по обе стороны от этой плоскости имеются точки многогранника (см. [8], п. 14 или п. 26).

Фигура, образованная пересечением многогранника $\bar{F}$ и какой-нибудь его секущей плоскости α, называется *сечением многогранника $\bar{F}$ плоскостью α*. Ясно, что сечение многогранника является плоской фигурой, расположенной в секущей плоскости. В большинстве случаев эта фигура — многоугольник. Однако в ряде случаев, как, например, в случае, изображенном на рис. 50, сечение многогранника не является многоугольником.

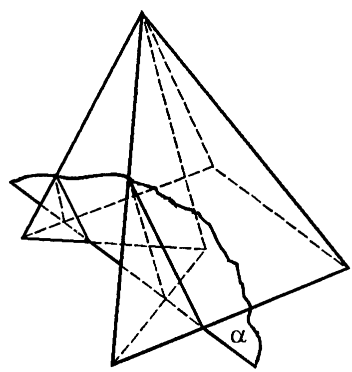


РИС. 50

Докажем теорему о сечении выпуклого многогранника.

Теорема. *Сечение выпуклого многогранника с числом граней f является выпуклым k-угольником, где $3 \leqslant k \leqslant f$. Вершинами этого k-угольника являются те и только те точки секущей плоскости, каждая из которых совпадает либо с какой-нибудь вершиной многогранника, либо с точкой пересечения какого-нибудь ребра с секущей плоскостью.*

□ Пусть $\bar{\Phi}$ — сечение выпуклого многогранника $\bar{F}$ секущей плоскостью α, а Φ — фигура, образованная пересечением поверхности многогранника $\bar{F}$ и плоскости α. Докажем, что $\bar{\Phi}$ — выпуклый многоугольник с границей Φ. Для этого прежде всего заметим, что $\bar{\Phi}$ и Φ являются плоскими фигурами, расположенными в плоскости α. Причем все точки фигуры Φ принадлежат фигуре $\bar{\Phi}$.

Докажем сначала, что Φ — простая замкнутая ломаная. Фигура Φ состоит из отрезков, по которым плоскость α пересекает отдельные грани многогранника $\bar{F}$. Пусть M_0 — произвольная внутренняя точка многогранника $\bar{F}$, лежащая в плоскости α. По лемме § 27 любой луч плоскости α, исходящий из точки M_0, пересекает фигуру Φ в одной точке. Отсюда мы заключаем, что Φ — замкнутая ломаная. Так как смежные грани многогранника F не лежат в одной плоскости, а несмежные грани не имеют общих точек, то смежные звенья ломаной Φ не лежат на одной прямой, а несмежные звенья не имеют общих точек. Таким образом, Φ — простая замкнутая ломаная, поэтому $\bar{\Phi}$ — многоугольник с границей Φ.

Докажем, что $\bar{\Phi}$ — выпуклый многоугольник. Пусть AB — произвольная сторона этого многоугольника. Прямая AB является пересечением плоскости α с плоскостью какой-нибудь грани P многогранника $\bar{F}$. Так как $\bar{F}$ — выпуклый многогранник, то все его точки принадлежат замкнутому полупространству с границей, являющейся плоскостью грани P. Поэтому все точки многоугольника $\bar{\Phi}$ принадлежат пересечению этого полупространства и плоскости α, т. е. замкнутой полуплоскости с границей AB. Следовательно, $\bar{\Phi}$ — выпуклый многоугольник. Ясно, что число сторон этого многоугольника не меньше чем 3 и не больше числа граней многогранника $\bar{F}$, поэтому $3 \leqslant k \leqslant f$.

Для обоснования второго утверждения теоремы заметим, что вершинами многоугольника $\bar{\Phi}$ не могут быть внутренние точки граней многогранника $\bar{F}$ или точки, лежащие на тех ребрах, которые целиком расположены в плоскости α. Таким образом, каждая из вершин многоугольника $\bar{\Phi}$ либо совпадает с какой-нибудь вершиной многогранника $\bar{F}$, лежащей в плоскости α, либо с точкой пересечения плоскости α с каким-нибудь ребром этого многогранника. С другой стороны, ясно, что любая из таких точек является вершиной многоугольника Φ. ■

2. Сечения выпуклой призмы

Пользуясь доказанной теоремой, рассмотрим возможные случаи взаимного расположения секущей плоскости и данной выпуклой n-угольной призмы $A_1A_2 \ldots A_nB_1B_2 \ldots B_n$ и выясним, каким многоугольником является сечение $\bar{\Phi}$ в каждом отдельном случае.

а) Плоскость α параллельна всем боковым ребрам призмы или содержит одно или два боковых ребра. В этом случае секущая плоскость пересекает основания по отрезкам и многоугольник $\bar{\Phi}$ имеет четыре вершины. Читатель самостоятельно убедится в том, что $\bar{\Phi}$ — *параллелограмм, две противоположные стороны которого принадлежат основаниям призмы* (рис. 51а).

б) Плоскость α не параллельна боковым ребрам призмы и ни одна из внутренних точек оснований призмы не лежит в этой плоскости. Тогда, очевидно, плоскость α не пересекает ни одно из ребер оснований[1]. В этом случае плоскость α имеет с каждым боковым ребром призмы одну и только одну общую точку. По предыдущей теореме $\bar{\Phi}$ — *выпуклый* n-угольник (рис. 51б).

в) Плоскость α не параллельна боковым ребрам призмы и хотя бы одна из внутренних точек одного из оснований, например основания $A_1A_2 \ldots A_n$, лежит в этой плоскости, но ни одна из внутренних точек другого основания не лежит в ней. Тогда плоскость α пересекает многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ по некоторому отрезку P_1P_2, не совпадающему со сторонами этого многоугольника. Докажем, что в этом случае $\bar{\Phi}$ — выпуклый *k-угольник, где k может принимать любое значение от* 3 *до* $n + 1$. Для этого проведем через прямую P_1P_2 плоскость β, параллельную боковым ребрам призмы, и обозначим через Q_1Q_2 отрезок, по которому плоскость β пересекает основание $B_1B_2 \ldots B_n$

---

[1] Напомним следующее определение: говорят, что плоскость пересекает отрезок, если отрезок имеет с плоскостью только одну общую внутреннюю точку (см. § 2, п. 1).

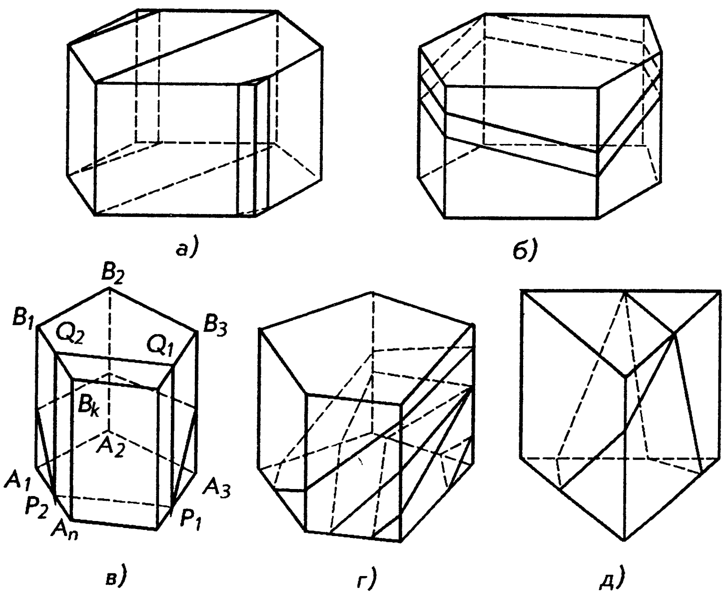


РИС. 51

(рис. 51в). Согласно случаю а) сечением призмы плоскостью β является параллелограмм $P_1Q_1Q_2P_2$. Мы получаем две выпуклые призмы с общей боковой гранью $P_1Q_1Q_2P_2$: $\bar{\bar{F}}_1 = A_1A_2 \dots A_sP_1P_2B_1B_2 \dots B_sQ_1Q_2$ и $\bar{\bar{F}}_2 = A_{s+1} \dots A_nP_2P_1B_{s+1} \dots B_nQ_2Q_1$, где s может принимать значение от 1 до $n-1$. Плоскость α является секущей плоскостью только одной из этих призм, например призмы $\bar{\bar{F}}_1$, а с призмой $\bar{\bar{F}}_2$ имеет только общий отрезок P_1P_2. Поэтому сечение $\bar{\Phi}$ исходной призмы $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ плоскостью α совпадает с сечением призмы $\bar{\bar{F}}_1$ этой плоскостью.

Ни одна из внутренних точек оснований призмы $\bar{\bar{F}}_1$ не лежит в плоскости α, следовательно, согласно случаю б) $\bar{\Phi}$ — выпуклый $(s+2)$-угольник, т. е. выпуклый k-угольник, где k может принимать любые значения от 3 до $n+1$. На рис. 51г изображены все четыре возможных случая сечения выпуклой пятиугольной призмы.

г) Плоскость α не параллельна боковым ребрам призмы, и в ней лежат внутренние точки каждого из двух оснований. Тогда плоскость α пересекает каждое основание призмы по отрезку. По аналогии со случаем в) предлагаем читателю самостоятельно доказать, что в этом случае $\bar{\Phi}$ — *выпуклый k-угольник, где k может принимать любое значение от* 4 *до* $n + 2$. На рис. 51д изображены два возможных случая сечения треугольной призмы.

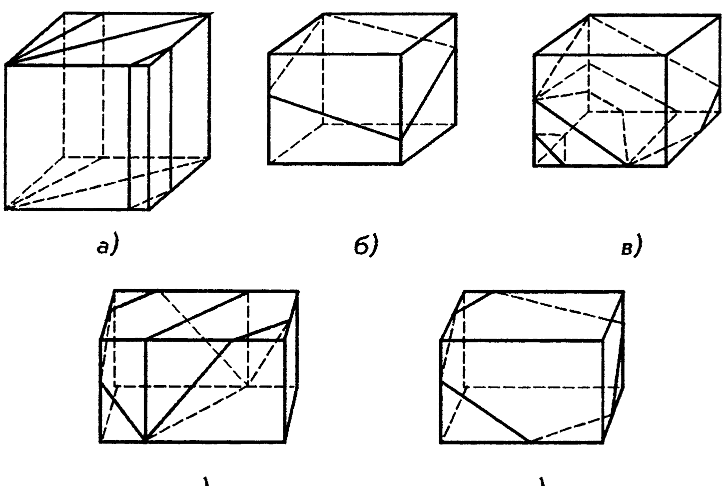
3. Сечения параллелепипеда

Параллелепипед является выпуклой четырехугольной призмой. Применяя выводы предыдущего пункта, приходим к следующим утверждениям.

а) Если плоскость сечения параллельна боковым ребрам или содержит одно или два боковых ребра параллелепипеда, то сечением является параллелограмм. Возможные три случая изображены на рис. 52а.

б) Если плоскость сечения не параллельна боковым ребрам параллелепипеда и ни одна из внутренних точек оснований не лежит в этой плоскости, то сечением является параллелограмм (рис. 52б).

в) Если плоскость сечения не параллельна боковым ребрам параллелепипеда и хотя бы одна из внут-



а) б) в) г) д)

Рис. 52

ренних точек одного из оснований лежит в этой плоскости, то сечением является либо треугольник, либо параллелограмм, либо трапеция, либо пятиугольник (рис. 52в).

г) Если плоскость сечения не параллельна боковым ребрам параллелепипеда и в ней лежат внутренние точки каждого из двух оснований, то сечением является либо параллелограмм, либо трапеция, либо пятиугольник (рис. 52г), либо шестиугольник (рис. 52д).

4. Сечения выпуклой пирамиды и усеченной пирамиды

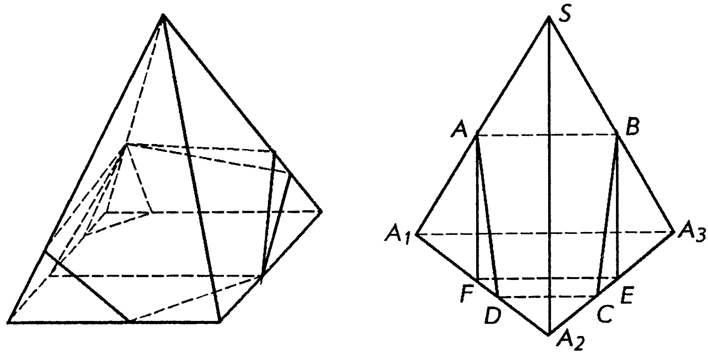
Теорема п. 1 позволяет рассмотреть также возможные случаи взаимного расположения секущей плоскости и данной выпуклой пирамиды, в частности тетраэдра, или выпуклой усеченной пирамиды и выяснить, каким многоугольником является сечение в каждом отдельном случае. Предлагаем читателю, по аналогии с п. 2, провести исследование этого вопроса и убедиться в справедливости выводов, приведенных ниже в обзорном порядке.

Возможны три следующих случая взаимного расположения секущей плоскости α и данной выпуклой пирамиды $SA_1A_2 \ldots A_n$.

а) Плоскость α проходит через вершину S пирамиды. В этом случае сечение $\bar{\Phi}$ — треугольник, одна вершина которого совпадает с вершиной пирамиды, а другие две принадлежат ребрам основания.

б) Плоскость α не проходит через вершину S пирамиды, и ни одна из внутренних точек основания не лежит в этой плоскости. В этом случае, по аналогии со случаем б) п. 2, плоскость α имеет с каждым боковым ребром пирамиды одну и только одну точку, поэтому согласно предыдущей теореме п. 1 $\bar{\Phi}$ — выпуклый n-угольник.

в) Плоскость α не проходит через вершину S пирамиды, и хотя бы одна из внутренних точек основания лежит в этой плоскости. Тогда плоскость α пересекает ее основание по некоторому отрезку, не совпадающему со сторонами основания. В этом случае $\bar{\Phi}$ — выпуклый k-угольник, где k может принимать любое значение от 3 до $n + 1$. Например при $n = 4$ сечениями являются треугольники, четырехугольники и пятиугольники (рис. 53а).



а) б)

Рис. 53

Тетраэдр является треугольной пирамидой, поэтому сечениями тетраэдра могут быть треугольники и четырехугольники. Если плоскость сечения, не проходящая через вершину тетраэдра, параллельна только одному ребру, то сечением является трапеция, а если эта плоскость параллельна двум противоположным ребрам, то сечением является параллелограмм (рис. 53б; на этом рисунке $ABCD$ — трапеция, и $ABEF$ — параллелограмм).

Изучение возможных случаев взаимного расположения секущей плоскости и выпуклой усеченной пирамиды аналогично соответствующим случаям сечения выпуклой призмы, рассмотренным в п. 2. Сечениями выпуклой усеченной n-угольной пирамиды могут быть выпуклые k-угольники, где k может принимать все значения от 3 до $n + 2$.

§ 33. ОПИСАННЫЕ И ВПИСАННЫЕ СФЕРЫ

1. Сфера, описанная около многогранника

Сфера называется *описанной около многогранника*, если все вершины многогранника принадлежат сфере. При этом многогранник называется *вписанным в сферу*.

Лемма. *Существует не более одной сферы, описанной около данного многогранника.*

□ Пусть A, B, C, D — какие-либо четыре вершины данного многогранника $\bar{F}$, не принадлежащие одной плоскости. Так как согласно лемме § 23 через эти точки проходит одна и только одна сфера, то существует не более одной сферы, проходящей через все вершины многогранника $\bar{F}$, т. е. существует не более одной сферы, описанной около многогранника. ■

2. Сферы, описанные около тетраэдра и параллелепипеда

Докажем сначала теорему о сфере, описанной около тетраэдра.

Теорема 1. *Около произвольного тетраэдра можно описать сферу, причем только одну.*

□ Согласно лемме § 23 через четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, проходит одна и только одна сфера, следовательно, около произвольного тетраэдра можно описать сферу и притом только одну. ■

Докажем теперь теорему о сфере, описанной около параллелепипеда.

Теорема 2. *Около параллелепипеда можно описать сферу тогда и только тогда, когда параллелепипед является прямоугольным. В этом случае описанная сфера единственная.*

□ Пусть $MNPQ$ — произвольная грань данного параллелепипеда $\bar{F}$, около которого описана сфера. Так как вершины этой грани принадлежат сфере, то плоскость грани пересекает сферу по окружности, на которой лежат все вершины параллелограмма $MNPQ$. Отсюда следует, что $MNPQ$ — прямоугольник. Таким образом, все грани параллелепипеда $\bar{F}$ являются прямоугольниками, поэтому боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны к основаниям и его основания — прямоугольники. Итак, $\bar{F}$ — прямоугольный параллелепипед.

Обратно, пусть $\bar{F}$ — прямоугольный параллелепипед. По следствию из теоремы 4 § 29 диагонали этого параллелепипеда равны, а по свойству 2^0 § 15 они пересекаются в некоторой точке O и в этой точке каждая диагональ делится пополам. Поэтому точка O

равноудалена от всех вершин параллелепипеда и сфера с центром O, проходящая через какую-нибудь вершину параллелепипеда $\bar{F}$, описана около параллелепипеда. Согласно лемме п. 1 эта сфера является единственной сферой, описанной около параллелепипеда $\bar{F}$. ■

Из доказанной теоремы следует, что около произвольного параллелепипеда, вообще говоря, нельзя описать сферу.

3. Сферы, описанные около призмы, пирамиды и усеченной пирамиды

Теорема 3. *Если $\bar{F}$ — правильная призма, правильная пирамида или правильная усеченная пирамида, то существует одна и только одна сфера, описанная около многогранника $\bar{F}$.*

□ Обозначим через C и D центры оснований многогранника $\bar{F}$, если $\bar{F}$ — правильная призма или правильная усеченная пирамида, через C и D соответственно центр основания и вершину, если $\bar{F}$ — правильная пирамида.

На прямой CD возьмем точку, равноудаленную от концов какого-нибудь бокового ребра MN многогранника $\bar{F}$. Такая точка существует, так как прямая MN не перпендикулярна к прямой CD, поэтому плоскость, проходящая через середину отрезка MN и перпендикулярная к нему, пересекает прямую CD в некоторой точке O, которая согласно задаче 1 § 11 равноудалена от вершин M и N многогранника.

Нетрудно видеть, что точка O равноудалена от всех вершин многогранника $\bar{F}$, поэтому сфера Ω с центром O радиуса OM является описанной около этого многогранника. По лемме п. 1 Ω — единственная сфера, описанная около $\bar{F}$. ■

Если $\bar{F}$ — произвольная призма, пирамида или усеченная пирамида, то около многогранника $\bar{F}$ не всегда можно описать сферу. Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующие утверждения.

1^0. *Около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания пирамиды можно описать окружность.*

2^0. *Около призмы можно описать сферу тогда и* *только тогда, когда призма является прямой и около основания призмы можно описать окружность.*

3°. *Около усеченной пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее оснований можно описать окружности и прямая, соединяющая центры этих окружностей, перпендикулярна к плоскостям оснований.*

По лемме п. 1 в каждом из этих случаев описанная сфера является единственной.

4. Сфера, вписанная в многогранник

Сфера называется *вписанной в многогранник*, если плоскости всех граней многогранника касаются сферы в точках, расположенных внутри этих граней. При этом многогранник называется *описанным около сферы.*

Докажем теорему о сфере, вписанной в тетраэдр.

Теорема 4. *В произвольный тетраэдр можно вписать сферу, и притом только одну.*

□ Докажем сначала, что в данный тетраэдр $ABCD$ можно вписать сферу. Рассмотрим три биссектральные полуплоскости σ_{AB}, σ_{BC} и σ_{AC} двугранных углов с ребрами AB, BC и CA данного тетраэдра (рис. 54, на этом рисунке $M \in \sigma_{AB}$, $N \in \sigma_{BC}$, а плоскость σ_{AC} не изображена).

Полуплоскости σ_{AB} и σ_{BC} пересекаются по некоторому лучу h, исходящему из точки B. Очевидно, луч h пересекает биссектральную полуплоскость σ_{AC} в некоторой точке O, которая является единственной общей

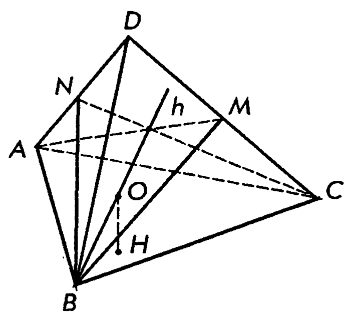


рис. 54

точкой полуплоскостей σ_{AB}, σ_{BC} и σ_{AC}. По теореме 2 § 20 точка O равноудалена от плоскостей всех граней тетраэдра.

Проекция H точки O на плоскость ABC принадлежит соответствующим граням двугранных углов с ребрами AB, BC и CA данного тетраэдра, поэтому H — внутренняя точка треугольника ABC. Аналогично, проекции точки O на плоскости граней ABD, ACD и BCD лежат внутри соответствующих треугольников. Следовательно, сфера Ω с центром O радиуса OH является вписанной в тетраэдр $ABCD$.

Докажем теперь, что Ω — единственная сфера, вписанная в этот тетраэдр. Предположим, что какая-нибудь сфера Ω' с центром O' вписана в этот же тетраэдр $ABCD$. По теореме 2 § 20 точка O' лежит в каждой из полуплоскостей σ_{AB}, σ_{BC} и σ_{CA}, поэтому совпадает с точкой O. Радиус r' сферы Ω' — равен расстоянию от точки O до плоскости ABC, т. е. $r' = OH$. Таким образом, Ω и Ω' — одна и та же сфера. ■

Если число граней многогранника больше четырех, то, как следует из дальнейшего изложения, в такой многогранник не всегда можно вписать сферу.

Согласно теореме 3 около правильной призмы, пирамиды или усеченной пирамиды можно описать сферу. Аналогичное утверждение имеет место для сферы, вписанной в правильную пирамиду, но не имеет места для правильной призмы и правильной усеченной пирамиды. Сформулируем следующие утверждения, доказательства которых предоставляем читателю.

4°. *В правильную пирамиду можно вписать сферу, и притом только одну.*

5°. *В правильную усеченную пирамиду можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее апофема равна сумме радиусов окружностей, вписанных в ее основания.*

6°. *В правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в ее основание.*

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VI

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЛО. МНОГОГРАННИК

260. Доказать, что любая замкнутая многогранная поверхность имеет не менее четырех граней, не менее четырех вершин и не менее шести ребер.

261. Фигура Φ состоит из многоугольников, каждый из которых есть некоторая грань замкнутой многогранной поверхности F, но не все грани этой поверхности принадлежат Φ. Доказать, что Φ не является замкнутой многогранной поверхностью.

262. Дана выпуклая многогранная поверхность F. Доказать, что: а) все грани поверхности F являются выпуклыми многоугольниками и в плоскости каждой ее грани нет точек поверхности F, отличных от точек этой грани; б) прямая, не лежащая ни в одной из плоскостей граней поверхности F, не имеет с поверхностью более двух общих точек.

263. Дана внешняя точка A относительно области G и точка B этой области. Доказать, что: а) на отрезке AB существует граничная точка M_0 области G такая, что все точки отрезка AM_0, кроме точки M_0, являются внешними относительно G; б) на любой ломаной, соединяющей точки A и B, имеется хотя бы одна граничная точка области G.

264. Доказать, что на любом луче h, исходящем из внутренней точки A ограниченной области, существует граничная точка M_0 этой области такая, что все точки луча h, не принадлежащие отрезку AM_0, являются внешними относительно данной области.

265. Доказать, что любая точка, лежащая между двумя данными точками выпуклого тела, является внутренней точкой этого тела, если хотя бы одна из данных точек является внутренней точкой тела.

266. Доказать, что фигура, образованная пересечением данного выпуклого геометрического тела и замкнутого полупространства с границей, проходящей через внутреннюю точку тела, есть выпуклое геометрическое тело.

267. Доказать, что в выпуклом многограннике: а) грани являются выпуклыми многоугольниками; б) на плоскости каждой грани нет ни одной точки многогранника, отличной от точек этой грани.

268. Доказать, что пересечение всех замкнутых полупространств данного выпуклого многогранника (см. п. 1 § 27) совпадает с множеством всех точек этого многогранника.

269. Доказать, что любые две внешние точки относительно данного выпуклого многогранника можно соединить ломаной, целиком состоящей из внешних точек.

270. Доказать, что любая замкнутая выпуклая многогранная поверхность является границей одного и только одного многогранника, который является выпуклым многогранником.

271. Доказать, что многогранник выпуклый тогда и только тогда, когда он является выпуклой фигурой.

272. Основанием обобщенного цилиндра или обобщенного конуса $\bar{F}$ является выпуклый многоугольник или круг. Доказать, что пересечение прямой, проходящей через некоторую точку фигуры $\bar{F}$, не принадлежащую ее полной поверхности, есть отрезок, причем концы этого отрезка являются единственными общими точками данной прямой и полной поверхности фигуры $\bar{F}$.

273. Основанием обобщенного цилиндра или обобщенного конуса $\bar{F}$ является круг или выпуклый многоугольник. Доказать, что $\bar{F}$ — выпуклая фигура.

274. Доказать, что обобщенный конус есть геометрическое тело, поверхностью которого является его полная поверхность.

275. Доказать, что обобщенный цилиндр или обобщенный конус, основанием которого является многоугольник, есть многогранник.

276. Доказать, что обобщенный конус с основанием $\bar{\omega}_1$ и вершиной O_1 равен обобщенному конусу с основанием $\bar{\omega}_2$ и вершиной O_2, если существует наложение f такое, что $\bar{\omega}_2 = f(\bar{\omega}_1)$, $O_2 = f(O_1)$.

277. Доказать, что при подобии обобщенный цилиндр (обобщенный конус) переходит в обобщенный цилиндр (обобщенный конус).

ТЕТРАЭДР

278. Доказать, что если какие-то две пары противоположных ребер тетраэдра взаимно перпендикулярны, то три прямые, содержащие общие перпендикуляры каждой пары прямых, содержащих противоположные ребра, пересекаются в одной точке.

279. Доказать, что точка пересечения четырех отрезков, каждый из которых соединяет вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, совпадает с точкой пересечения трех отрезков, соединяющих середины противоположных ребер.

280. Точка O лежит внутри тетраэдра и равноудалена от плоскостей его граней. Доказать, что проекция точки O на плоскость каждой грани есть внутренняя точка этой грани.

281. Доказать, что шесть плоскостей пересекаются в одной точке, если каждая из них проведена через середину ребра тетраэдра и: а) перпендикулярна к этому ребру; б) перпендикулярна к противоположному ребру.

282. Прямая, содержащая одну из высот тетраэдра, проходит через точку пересечения прямых, содержащих высоты грани, к плоскости которой проведена высота. Доказать, что все прямые, содержащие высоты тетраэдра, обладают тем же свойством и что противоположные ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны.

283. Доказать, что прямые, содержащие высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда каждая прямая, содержащая высоту тетраэдра, проходит через точку пересечения прямых, содержащих высоты грани, к плоскости которой проведена высота.

284. Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Доказать, что шесть полученных плоскостей, пересекаясь, образуют полную поверхность параллелепипеда.

285. Доказать, что прямые, содержащие высоты тетраэдра, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных ребер тетраэдра равны.

286. Все плоские углы тетраэдра при данной вершине прямые. Доказать, что квадрат площади грани, противоположной данной вершине, равен сумме квадратов площадей трех других граней.

287. Доказать, что в правильном тетраэдре: а) все его высоты равны друг другу и пересекаются в одной точке; б) все его двугранные углы равны друг другу.

288. Дан правильный тетраэдр, стороны которого равны a. Найти: а) высоту тетраэдра; б) угол между прямыми, содержащими любые две высоты тетраэдра; в) меру двугранных углов; г) угол между прямой, содержащей ребро, и плоскостью грани, не содержащей это ребро.

ПРИЗМА. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

289. Доказать, что отрезок, соединяющий центры оснований правильной призмы, является высотой этой призмы.

290. Основанием треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC. Вершина A_1 проектируется в центр O треугольника ABC. Доказать, что: а) плоскость грани AA_1C_1C перпендикулярна к плоскости A_1BO; б) грань BB_1C_1C является прямоугольником и плоскость этой грани перпендикулярна к плоскости AA_1O.

291. В треугольной призме каждая сторона одного из оснований равна a. Одна из вершин другого основания проектируется в центр первого основания. Боковые ребра призмы наклонены к плоскости основания под углом α. Найти площадь боковой поверхности призмы.

292. Доказать, что середина отрезка, соединяющего середины параллельных ребер параллелепипеда, не лежащих в одной грани, совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелепипеда.

293. Доказать, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и CD_1B_1, плоскости которых параллельны, и делится этими точками на три равных отрезка.

294. Доказать, что середины ребер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 и A_1A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в одной плоскости, которая проходит через точку пересечения диагоналей параллелепипеда.

295. Доказать, что параллелепипед является прямоугольным, если выполняется хотя бы одно из условий: а) все его грани — прямоугольники; б) все его диагонали равны.

296. На боковых ребрах BB_1 и CC_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки P и Q так, что $BP : PB_1 = C_1Q : QC = 1 : 2$. Доказать, что двугранные углы $A_1 \cdot AQ \cdot P$ и $A \cdot A_1P \cdot Q$ прямые.

ПИРАМИДА. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

297. Доказать, что пирамида (усеченная пирамида) является выпуклой тогда и только тогда, когда ее основание является выпуклым многоугольником.

298. Доказать, что в правильной пирамиде плоскость, проходящая через высоту пирамиды и ее апофему, перпендикулярна к плоскости боковой грани, содержащей эту апофему.

299. Один из плоских углов при вершине S треугольной пирамиды — прямой, и высота SH проходит через точку пересечения прямых, содержащих высоты основания. Доказать, что два других плоских угла при вершине S прямые.

300. В тетраэдре $ABCD$ грани ACB и ADB — прямоугольные равнобедренные треугольники с общей гипотенузой AB. Мера двугранного угла $C \cdot AB \cdot D$ равна α. Найти меры φ_1 и φ_2 двугранных углов с ребрами BC и AC тетраэдра.

301. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$. Ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и $SA = 2a$. Через вершину A проведена плоскость, которая перпендикулярна к прямой SC. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью ABC.

302. Две треугольные пирамиды $SABC$ и $S'ABC$ имеют общее основание ABC. Вершина S' второй пирамиды принадлежит первой пирамиде. Доказать, что сумма плоских углов при вершине S' пирамиды $S'ABC$ больше, чем сумма плоских углов при вершине S пирамиды $SABC$.

303. Доказать, что усеченная пирамида есть геометрическое тело, поверхностью которого является ее полная поверхность.

304. Доказать, что в правильной усеченной пирамиде апофема и отрезок, соединяющий центры ее оснований, лежат в одной плоскости, перпендикулярной к плоскости грани, содержащей апофему.

СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

305. Доказать, что если плоскость сечения не параллельна боковым ребрам выпуклой n-угольной призмы и в ней лежат внутренние точки двух оснований призмы, то сечением этой призмы является выпуклый k-угольник, где k может принимать любое значение от 4 до $n + 2$.

306. Доказать, что сечением выпуклой n-угольной пирамиды является выпуклый k-угольник, где $3 \leqslant k \leqslant n + 1$. Для любого ли значения k в указанных пределах существует хотя бы одна секущая плоскость?

307. Доказать, что сечением куба плоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной к одной из его диагоналей, является правильный шестиугольник. Найти площадь этого сечения, если сторона куба равна a.

308. Доказать, что сечением куба является выпуклый k-угольник, где $k = 3$, 4, 5, 6. Для каких значений k существует сечение, являющееся правильным k-угольником. Ответ обосновать.

309. Доказать, что через середину данного ребра куба проходят две и только две плоскости, которые пересекают куб по правильному шестиугольнику.

310. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$, плоскость которого перпендикулярна к ребру SC. Доказать, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через BD и параллельной AS, есть треугольник. Найти площадь этого треугольника, если угол между плоскостью сечения и прямой AS равен 60°.

311. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, ее высота равна h. Доказать, что сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты и параллельной двум противоположным ребрам, есть прямоугольник, и найти площадь этого прямоугольника.

312. Доказать, что сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, CC_1, A_1D_1, есть шестиугольник. Найти площадь этого шестиугольника, если a, b, c — измерения параллелепипеда.

313. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно 1 см. Доказать, что сечение призмы плоскостью, проходящей через два параллельных ребра разных оснований, не принадлежащих одной грани, есть шестиугольник, и найти площадь этого шестиугольника.

314. Тетраэдр $ABCD$ пересечен двумя плоскостями, каждая из которых параллельна прямым AB и CD. Доказать, что полученные при этом сечения равновелики тогда и только тогда, когда расстояние от прямой AB до одной плоскости равно расстоянию от прямой CD до другой плоскости.

315. Точка M — середина ребра AB правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, а N — середина отрезка MB. Через эти точки проведены плоскости α и β, перпендикулярные к прямой AB. Выяснить, какие многоугольники получены в сечениях, и найти отношение их площадей.

316. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная одной из боковых граней. Определить, каким многоугольником является полученное сечение, и найти его площадь.

317. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро равно $a\sqrt{3}$. Доказать, что сечением пирамиды плоскостью, проходящей через середину бокового ребра и перпендикулярной к нему, является треугольник, и найти площадь этого треугольника.

318. Плоскость проходит через середину отрезка, соединяющего центр данной грани куба с какой-нибудь вершиной противоположной грани, и перпендикулярна к этому отрезку. Доказать, что сечение куба этой плоскостью есть выпуклый пятиугольник, и найти площадь этого пятиугольника, если ребро куба равно a.

319. Доказать, что около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность. При этом центр описанной сферы лежит на прямой, проходящей через центр этой окружности и перпендикулярной к плоскости основания пирамиды.

320. Доказать, что около правильной пирамиды можно описать одну и только одну сферу, центр которой лежит на луче SH, где SH — высота пирамиды.

321. Доказать, что около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда призма является прямой и около ее основания можно описать окружность. При этом центр сферы является серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.

322. Доказать, что около усеченной пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее оснований можно описать окружности и прямая, соединяющая центры этих окружностей, перпендикулярна к плоскостям оснований.

323. В треугольной пирамиде $DABC$ все плоские углы при вершине D прямые. Доказать, что вершина D, точка G пересечения медиан основания ABC и центр O сферы, описанной около пирамиды, лежат на одной прямой и $\frac{OG}{GD} = \frac{1}{2}$.

324. Доказать, что существует не более одной сферы, вписанной в данный многогранник.

325. Доказать, что в правильную пирамиду можно вписать сферу и притом только одну. Центр этой сферы лежит на высоте пирамиды, а точки касания с боковыми гранями принадлежат соответствующим апофемам.

326. Доказать, что в правильную усеченную пирамиду можно вписать сферу, и притом только одну, тогда и только тогда, когда ее апофема равна сумме радиусов окружностей, вписанных в ее основания.

327. Доказать, что в правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в ее основание.

328. Доказать, что в параллелепипед можно вписать сферу тогда и только тогда, когда расстояния между плоскостями параллельных граней равны друг другу.

329. Дана правильная треугольная пирамида, сторона основания и боковое ребро которой соответственно равны a и b. Доказать, что высота h пирамиды, радиус r вписанной в пирамиду сферы и радиус R описанной около нее сферы равны: $h = \frac{\sqrt{3}}{3}c$, $r = \frac{a}{12c}(3\sqrt{4b^2 - a^2} - \sqrt{3}a)$, $R = \frac{\sqrt{3}b^2}{2c}$, где $c = \sqrt{3b^2 - a^2}$.

330. Дан правильный тетраэдр, сторона которого равна a. Доказать, что центры вписанной и описанной сфер совпадают с точкой пересечения высот тетраэдра, а радиус r и R этих сфер вычисляются по формулам: $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

331. Доказать, что правильная треугольная пирамида является правильным тетраэдром, если центры вписанной и описанной сфер совпадают.

332. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду, основанием которой служит ромб с диагоналями 6 см и 8 см, и высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 1 см.

333. Центр сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды, принадлежит сфере, вписанной в эту пирамиду. Найти отношение радиуса описанной сферы к радиусу вписанной сферы.

334. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если центры сфер, вписанной в пирамиду и описанной около нее, совпадают.

335. Около сферы описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, стороны оснований которой относятся как $m : n$, где $m > n$. Найти угол φ между боковым ребром и плоскостью основания.

336. Сфера, вписанная в треугольную пирамиду, касается всех боковых граней в точках пересечения биссектрис. Доказать, что пирамида — правильная.

337. Прямые, содержащие все высоты тетраэдра, пересекаются в точке H. Точка O — центр описанной сферы, а G — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней. Доказать, что либо точки H, O и G совпадают, либо они лежат на одной прямой (прямая Эйлера) и G — середина отрезка OH.

338. Прямые, содержащие высоты тетраэдра, пересекаются в точке H. Доказать, что точки пересечения медиан всех граней, основания высот тетраэдра и точки, которые делят каждый из отрезков, соединяющих точку H со всеми вершинами тетраэдра, в отношении $2:1$, считая от вершин, принадлежат одной сфере. Центр M этой сферы совпадает с точкой H, если H — центр описанной около тетраэдра сферы, в противном случае точка M лежит на прямой Эйлера (см. задачу 337).

Глава VII

ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР

§ 34. ЦИЛИНДР

1. Определение цилиндра

В п. 1 § 28 было отмечено, что основания обобщенного цилиндра равны и их плоскости параллельны. *Цилиндром вращения* или *прямым круговым цилиндром* называется обобщенный цилиндр, основаниями которого являются круги, расположенные так, что их плоскости перпендикулярны к прямой, проходящей через центры оснований (рис. 55). В дальнейшем мы будем рассматривать только цилиндры вращения, поэтому для краткости их будем называть просто *цилиндрами.*

Основания, образующие, боковая и полная поверхности обобщенного цилиндра называются соответственно *основаниями, образующими, боковой* и *полной поверхностями* цилиндра. Прямая, проходящая через центры оснований, называется *осью,* а радиусы оснований — *радиусом* цилиндра. Ось цилиндра будем обозначать через OO', предполагая без особых оговорок, что O и O' — центры оснований.

Напомним, что перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется *высотой* цилиндра. Ясно, что любая образующая цилиндра является его высотой.

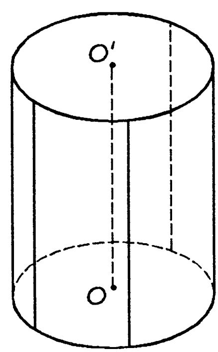


Рис. 55

Из определения цилиндра непосредственно вытекает следующий признак принадлежности точки пространства цилиндру: *точка пространства принадлежит цилиндру $\overline{F}$ с основанием $\overline{\omega}$ и осью OO' тогда и только тог-*

да, когда ее проекция на плоскость основания принадлежит кругу $\bar{\omega}$, а на ось OO' — отрезку OO'.

По теореме 1 § 28 цилиндр — геометрическое тело. Докажем, что *цилиндр является выпуклым телом.* Пусть $\bar{F}$ — данный цилиндр, $\bar{\omega}$ — одно из его оснований с центром O, а OO' — ось этого цилиндра. Докажем, что $\bar{F}$ — выпуклое тело, т. е. если концы произвольного отрезка AB принадлежат $\bar{F}$, то любая точка M этого отрезка принадлежит $\bar{F}$. Для этого рассмотрим проекцию M_1 точки M на плоскость основания $\bar{\omega}$ и проекцию M_2 этой же точки на ось OO'. По признаку принадлежности точки пространства цилиндру проекции точек A и B на плоскость основания $\bar{\omega}$ принадлежат кругу $\bar{\omega}$, поэтому и точка M_1 принадлежит этому кругу. Аналогично, проекции точек A и B на ось принадлежат отрезку OO', поэтому и точка M_2 принадлежит этому отрезку. Следовательно, по признаку принадлежности точки пространства цилиндру $M \in \bar{F}$.

Замечание. В силу теоремы 1 § 28 цилиндр есть геометрическое тело, поверхностью которого является полная поверхность цилиндра. По аналогии с доказательством теоремы § 26 можно доказать, что если F — полная поверхность данного цилиндра, то существует не более одного геометрического тела с поверхностью F. В некоторых школьных учебниках по геометрии (см. например, [8], п. 53) цилиндр определяется как геометрическое тело, которое ограничено полной поверхностью цилиндра. Таким образом, это определение цилиндра по существу совпадает с определением цилиндра, которое дано выше.

2. Сечение цилиндра плоскостями

Плоскость называется *секущей плоскостью* цилиндра, если хотя бы одна из внутренних точек цилиндра лежит в этой плоскости. Плоская фигура, образованная пересечением цилиндра с какой-нибудь из его секущих плоскостей, называется *сечением цилиндра* этой плоскостью.

Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями. Обратимся сначала к случаям, когда секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, параллельна этой оси или проходит через ось.

1^0. *Сечение цилиндра радиуса r плоскостью, перпендикулярной к оси OO' цилиндра и пересекающей ее в точке M, лежащей на отрезке OO', есть круг с центром M радиуса r.*

□ Пусть $\bar{F}$ — данный цилиндр с осью OO' и основанием $\bar{\omega}$, а σ — плоскость сечения (рис. 56). При параллельном переносе на отрезок $\overline{OM}$ круг $\bar{\omega}$ переходит в круг $\bar{\gamma}$ с центром M радиуса r, расположенный в плоскости σ. Каждая точка круга $\bar{\gamma}$ принадлежит цилиндру $\bar{F}$, так как ее проекция на плоскость круга $\bar{\omega}$ принадлежит этому кругу, а на прямую OO' — совпадает с точкой M, лежащей на отрезке OO'. С другой стороны, если точка N плоскости σ не принадлежит кругу $\bar{\gamma}$, то ее проекция на плоскость круга $\bar{\omega}$ не принадлежит этому кругу, следовательно, $N \notin \bar{F}$. Таким образом, $\bar{\gamma}$ — сечение цилиндра $\bar{F}$ плоскостью σ. ■

2^0. *Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось или параллельной оси и отстоящей от нее на расстоянии d, меньшем радиуса r цилиндра, есть прямоугольник, две противоположные стороны которого являются параллельными хордами оснований, а две другие — образующими.*

□ Так как $d < r$, то плоскость сечения пересекает основания $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ данного цилиндра по хордам, кото-

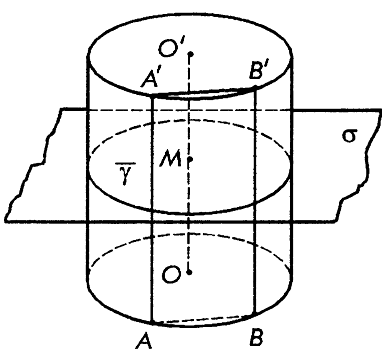


РИС. 56

рые обозначим через AB и $A'B'$ (см. рис. 56). Ясно, что отрезки AA' и BB' — образующие цилиндра, поэтому они параллельны и равны, и так как $AA' \perp AB$, то $ABB'A'$ — прямоугольник. Каждая точка X этого прямоугольника, расположенного в плоскости сечения, принадлежит данному цилиндру. В самом деле, проекция точки X на плоскость основания $\bar{\omega}$ принадлежит хорде AB, т. е. кругу $\bar{\omega}$, а на прямую OO' — лежит на отрезке OO'. С другой стороны, если точка Y плоскости сечения не принадлежит прямоугольнику $ABB'A'$, то либо ее проекция на плоскость круга $\bar{\omega}$ не принадлежит этому кругу, либо ее проекция на прямую OO' не лежит на отрезке OO', следовательно, $Y \notin \bar{F}$. Таким образом, прямоугольник $ABB'A'$ — сечение данного цилиндра секущей плоскостью. ■

Как следствие из этого утверждения получаем:

3°. *Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось (осевое сечение), есть прямоугольник, две противоположные стороны которого являются параллельными диаметрами оснований, а две другие — образующими. Все осевые сечения цилиндра равны друг другу.*

Отсюда следует, что ось цилиндра является осью симметрии цилиндра, и при повороте вокруг оси на любой угол цилиндр переходит в себя. Следовательно, можно сказать, что цилиндр получен вращением прямоугольника — любого осевого сечения — вокруг его оси (отсюда термин — цилиндр вращения).

Рассмотрим теперь сечение цилиндра $\bar{F}$ радиуса r с осью OO' произвольной плоскостью σ, пересекающей ось OO'. Для этого рассмотрим фигуру Γ, образованную из всех прямых пространства, каждая из которых содержит какую-нибудь образующую данного цилиндра $\bar{F}$. Фигура Γ, как нетрудно видеть, является цилиндрической поверхностью вращения радиуса r с осью OO' (т. е. поверхностью, образованной вращением вокруг прямой OO' прямой, параллельной OO' и отстоящей от нее на расстоянии r (см. [6], часть 1, § 75). Как известно из курса геометрии, сечение поверхности Γ плоскостью σ есть эллипс, в частности окружность, если $\sigma \perp OO'$. Ясно, что боковая поверхность цилиндра $\bar{F}$ является частью поверх-

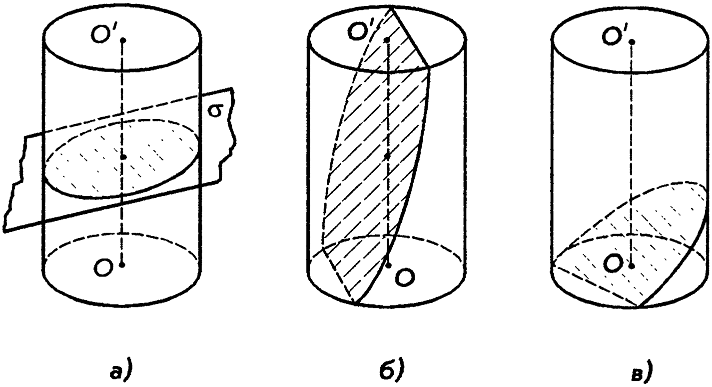


РИС. 57

ности Γ. Если ни одна из внутренних точек оснований цилиндра не лежит в плоскости σ, то сечение боковой поверхности цилиндра плоскостью σ совпадает с сечением поверхности Γ плоскостью σ, т. е. является эллипсом. Отсюда, по аналогии со свойством 2^0, мы приходим к утверждению:

4^0. *Сечение цилиндра плоскостью, которая не содержит ни одной внутренней точки оснований цилиндра, есть плоская фигура, ограниченная эллипсом* (рис. 57а).

В случае, когда секущая плоскость, пересекающая ось цилиндра, содержит внутренние точки оснований цилиндра, в сечении получаем замкнутую фигуру, ограниченную частью эллипса и двумя или одним отрезком (рис. 57б,в).

3. Касательная плоскость к цилиндру

Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и не имеющая с цилиндром общих точек, кроме точек этой образующей, называется *касательной плоскостью* к цилиндру.

Теорема. *Через каждую точку боковой поверхности цилиндра проходит одна и только одна касательная плоскость. Эта плоскость содержит образующую цилиндра, проходящую через данную точку, и перпендикулярна к плоскости, проходящей через данную точку и ось цилиндра.*

□ Пусть M — произвольная точка боковой поверхности цилиндра $\bar{F}$ радиуса r с осью OO', $\bar{\omega}$ — одно из оснований цилиндра, расположенного в плоскости α, а AA' — образующая, проходящая через точку M, где A — точка круга $\bar{\omega}$. Обозначим через l касательную к границе круга $\bar{\omega}$ в точке A.

Докажем сначала, что через точку M проходит касательная плоскость к цилиндру $\bar{F}$. Рассмотрим плоскость σ, которая проходит через точку A' и прямую l. Очевидно, эта плоскость проходит через образующую AA', поэтому $M \in \sigma$. Докажем, что σ — касательная плоскость к цилиндру $\bar{F}$. Для этого достаточно доказать, что любая общая точка X цилиндра $\bar{F}$ и плоскости σ принадлежит образующей AA'. Так как $AA' \perp \alpha$, то $\sigma \perp \alpha$. Следовательно, проекция X_1 точки X на плоскость α, согласно свойству 2^0 § 12, лежит в плоскости α, поэтому $X_1 \in l$. По признаку принадлежности точки пространства цилиндру (п. 1), $X_1 \in \bar{\omega}$, поэтому точка X_1 совпадает с точкой A. Отсюда следует, что X — точка, лежащая на образующей AA'.

Докажем теперь, что σ — единственная касательная плоскость к цилиндру $\bar{F}$, проходящая через точку M. Пусть σ' какая-нибудь касательная плоскость к цилиндру $\bar{F}$, проходящая через эту точку. Так как через точку M проходит только одна образующая цилиндра $\bar{F}$ (образующая AA'), то эта образующая лежит в плоскости σ'. Обозначим через l' прямую, по которой пересекаются плоскости σ' и α. Ясно, что $A \in l'$ и на прямой l', кроме точки A, нет других точек основания $\bar{\omega}$ (l' — прямая плоскости σ, которая является касательной плоскостью к цилиндру $\bar{F}$). Отсюда мы заключаем, что прямая l' — касательная к границе круга $\bar{\omega}$. Таким образом, прямые l и l' совпадают, поэтому и плоскости σ и σ' совпадают.

Докажем, наконец, что $\sigma \perp MOO'$. Так как $l \perp AO$ и $l \perp AA'$, то $l \perp OAA'$ или $l \perp MOO'$. Отсюда, учитывая, что прямая l лежит в плоскости σ, мы заключаем, что $\sigma \perp MOO'$. ■

С л е д с т в и е. *Касательная плоскость к цилиндру в любой его точке параллельна оси цилиндра.*

Предлагаем читателю, пользуясь признаком параллельности прямой и плоскости, обосновать это следствие самостоятельно.

§ 35. КОНУС И УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

1. Определение конуса

Конусом вращения или *прямым круговым конусом* называется обобщенный конус, основанием которого является круг, расположенный так, что его плоскость перпендикулярна к прямой, проходящей через центр основания и вершину (рис. 58). В дальнейшем мы будем рассматривать только конусы вращения, поэтому для краткости их будем называть просто *конусами.*

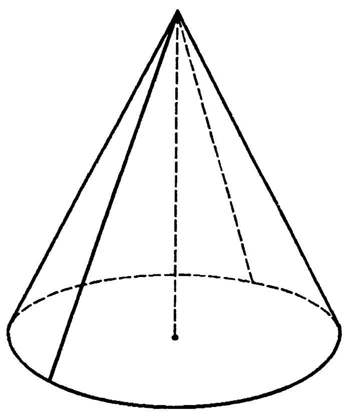


РИС. 58

Основание, вершина, образующие, боковая и полная поверхности обобщенного конуса называются соответственно *основанием, вершиной, образующими, боковой и полной поверхностями конуса.*

Конус имеет бесконечное множество равных между собой образующих, которые составляют с осью конуса равные острые углы. Прямая, проходящая через вершину и центр основания, называется *осью* конуса. Отрезок оси, соединяющий вершину конуса с центром основания, называется *высотой* конуса.

Из определения конуса вытекает следующий признак принадлежности точки пространства конусу: *точка M пространства, отличная от вершины конуса, принадлежит конусу с вершиной O и основанием $\bar{\omega}$ с центром C тогда и только тогда, когда прямая OM пересекает круг $\bar{\omega}$, а проекция точки M на прямую OC принадлежит отрезку OC.*

По теореме 2 § 28 конус является геометрическим телом. Так же, как и в случае цилиндра, можно доказать, что *конус есть выпуклое тело*, поверхностью которого является полная поверхность конуса.

Замечание. В силу теоремы 2 § 28 конус есть геометрическое тело, поверхностью которого является полная поверхность конуса. По аналогии с доказательством теоремы § 26 можно доказать, что если F — полная поверхность данного конуса, то существует не более одного геометрического тела с поверхностью F. В некоторых школьных учебниках по геометрии (см., например, [8], п. 55) конус определяется как геометрическое тело, которое ограничено полной поверхностью конуса. Таким образом, это определение конуса, по существу, полностью совпадает с определением, которое дано выше.

2. Сечение конуса плоскостями

По аналогии с понятиями, которые введены в п. 2 § 34, вводятся понятия секущей плоскости и сечения конуса. Рассмотрим сечения конуса различными плоскостями.

1^0. *Сечение конуса с вершиной O и основанием $\bar{\omega}$ с центром C плоскостью, перпендикулярной к оси и пересекающей ее в точке M, лежащей на отрезке CO, есть круг с центром M.*

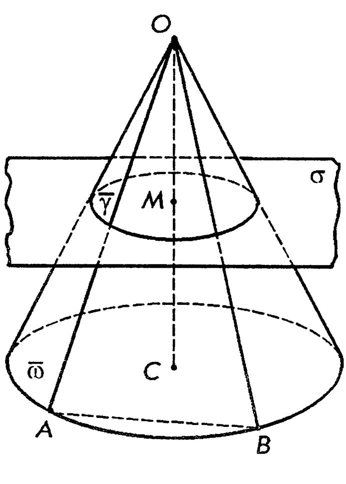


РИС. 59

□ Пусть $\bar{F}$ — данный конус, а σ — плоскость сечения (рис. 59). При гомотетии с центром O и коэффициентом $m = \frac{OM}{OC}$ круг $\bar{\omega}$ переходит в круг $\bar{\gamma}$ с центром M, который расположен в плоскости σ. Каждая точка круга $\bar{\gamma}$ принадлежит конусу $\bar{F}$, так как прямая, соединяющая ее с вершиной, пересекает круг $\bar{\omega}$, а ее проекция на прямую OC совпадает с точкой M, лежащей на отрезке OC. С другой стороны, если точка N плоскости σ не принадлежит кругу $\bar{\gamma}$, то прямая ON не пересекает круг $\bar{\omega}$, следовательно, $N \notin \bar{F}$. Таким образом, $\bar{\gamma}$ — сечение конуса $\bar{F}$ плоскостью σ. ■

2°. *Сечение конуса плоскостью, проходящей через точку O и пересекающей основание по хорде AB, есть равнобедренный треугольник OAB с основанием AB, боковые стороны которого являются образующими конуса.*

□ Пусть секущая плоскость проходит через вершину O конуса $\bar{F}$ и пересекает основание $\bar{\omega}$ с центром C по хорде AB (см. рис. 59). Ясно, что OA и OB — образующие конуса. Каждая точка M треугольника OAB, расположенного в плоскости сечения, принадлежит конусу $\bar{F}$, так как прямая OM имеет общую точку с отрезком AB, следовательно, и с кругом $\bar{\omega}$, а проекция точки M на прямую OC принадлежит отрезку OC. С другой стороны, если точка N секущей плоскости не принадлежит треугольнику OAB, то либо прямая ON не имеет общих точек с отрезком AB, а следовательно, и с кругом $\bar{\omega}$, либо проекция точки N на прямую OC не принадлежит отрезку OC, следовательно, $N \notin \bar{F}$. Таким образом, треугольник OAB — сечение данного конуса секущей плоскостью. ■

Из этого свойства непосредственно следует утверждение:

3°. *Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось (осевое сечение), есть равнобедренный треугольник, основанием которого является один из диаметров основания. Все осевые сечения конуса равны друг другу.*

Отсюда следует, что ось конуса является осью симметрии конуса и при повороте вокруг оси на любой угол конус переходит в себя. Следовательно, можно сказать, что конус получен вращением равнобедренного треугольника — любого осевого сечения — вокруг его оси (отсюда термин — конус вращения).

Рассмотрим теперь сечение конуса произвольной плоскостью σ, не проходящей через его вершину. Для этого, по аналогии с п. 2 § 34, рассмотрим фигуру Γ, образованную из всех прямых пространства, каждая из которых содержит какую-нибудь образующую

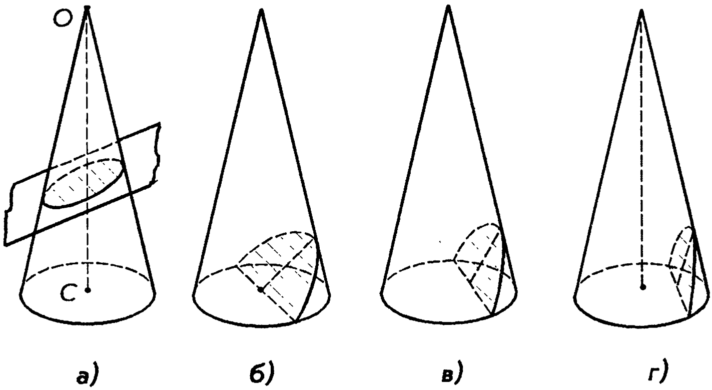


РИС. 60

данного конуса. Фигура Γ является круговой конической поверхностью, ось и вершина которой совпадают с осью и вершиной данного конуса. Из курса геометрии известно, что сечение этой поверхности плоскостью σ есть эллипс, гипербола или парабола (см. [6], часть 1, § 77). Ясно, что боковая поверхность данного конуса является частью поверхности Γ, поэтому имеет место утверждение, аналогичное утверждению 4^0 § 34, доказательство которого предоставляем читателю.

4^0. *Сечение конуса с вершиной O и центром C основания плоскостью, которая не содержит ни одной внутренней точки основания конуса, есть плоская фигура, ограниченная эллипсом* (рис. 60а).

В случае, когда секущая плоскость, не проходящая через вершину конуса, содержит внутренние точки основания конуса, в сечении получаем замкнутую фигуру, ограниченную частью эллипса, параболы или гиперболы и хордой основания (рис. 60б,в и г).

3. Касательная плоскость к конусу

Плоскость, проходящая через образующую конуса и не имеющая с конусом общих точек, кроме точек этой образующей, называется *касательной плоскостью* к конусу.

Предлагаем читателю, по аналогии с доказательством теоремы § 34, самостоятельно доказать следующую теорему о касательной плоскости к конусу.

Теорема. *Через каждую точку боковой поверхности конуса, отличную от вершины, проходит одна и только одна касательная плоскость. Эта плоскость содержит образующую конуса, проходящую через данную точку, и перпендикулярна к плоскости, проходящей через данную точку и ось конуса.*

4. Усеченный конус

Рассмотрим произвольный конус с вершиной O и через некоторую точку, лежащую на какой-нибудь образующей, проведем плоскость β, параллельную плоскости α основания конуса. Согласно утверждению 1^0 эта плоскость пересекает конус по кругу с центром на его оси (рис. 61).

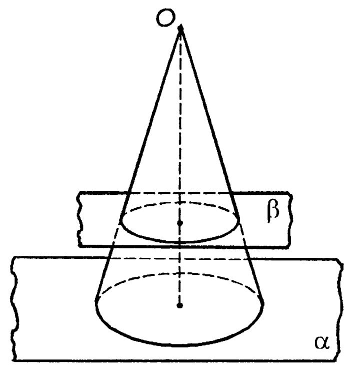


рис. 61

Фигура, образованная пересечением данного конуса и замкнутого полупространства с границей β, содержащего плоскость α, называется *усеченным конусом*. Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью β, называются *основаниями* усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры,— *высотой* усеченного конуса.

Отрезки образующих конуса, заключенные между основаниями усеченного конуса, называются *образующими усеченного конуса*. Из определения усеченного конуса следует, что прямые, содержащие образующие, всегда пересекаются в одной точке. Усеченный конус имеет бесконечное множество равных друг другу образующих. Фигура, образованная всеми этими образующими, называется *боковой поверхностью усеченного конуса*. Полной поверхностью или *поверхностью усеченного конуса* назовем фигуру, состоящую из его боковой поверхности и двух оснований. Можно доказать, что *усеченный конус есть выпуклое тело.*

§ 36. ШАР

1. Шар как выпуклое тело

Напомним, что шаром называется фигура, состоящая из множества всех точек пространства, расстояние[1] от каждой из которых до данной точки O не больше данного положительного числа r. Точка O называется *центром* шара, а число r — его *радиусом*. Сфера с центром O радиуса r называется *поверхностью* или границей шара. Все точки шара, не принадлежащие его поверхности, называются внутренними точками шара или точками, лежащими внутри шара. Таким образом, шар есть фигура, состоящая из объединения всех точек сферы (поверхности шара) и множества всех внутренних точек относительно этой сферы. Хорды и диаметры границы шара называются *хордами* и *диаметрами* самого шара.

Касательная плоскость к поверхности шара называется *касательной плоскостью* к шару. Из теоремы 2 § 23 следует, что плоскость является касательной к шару тогда и только тогда, когда она проходит через точку поверхности шара перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку. Отметим, что в силу следствия теоремы 2 § 23 через каждую точку поверхности шара проходит одна и только одна плоскость, касательная к шару.

Докажем, что *шар является выпуклой фигурой*. Пусть $\bar{F}$ — данный шар с центром O радиуса r. Рассмотрим произвольный отрезок AB, концы которого принадлежат $\bar{F}$, и докажем, что любая точка M этого отрезка принадлежит $\bar{F}$, т. е. $OM \leqslant r$. Если точки A, B, O лежат на одной прямой, в частности, если одна из точек A или B совпадает с точкой O, то неравенство $OM \leqslant r$ непосредственно следует из неравенств $OA \leqslant r$, $OB \leqslant r$. Если же точки O, A, B не лежат на одной прямой, то один из смежных углов AMO и BMO, например, $\angle BMO$ — прямой или тупой. По-

---

[1] Здесь, так же, как и в § 23, будем считать, что если точки A и B совпадают, то расстояние между ними равно нулю, и если точка лежит на прямой (плоскости), то расстояние от этой точки до прямой (плоскости) равно нулю.

этому в треугольнике OMB $OM < OB \leqslant r$, поэтому $OM < r$.

Точно так же доказывается, что *множество всех внутренних точек шара является выпуклым множеством.*

В § 26 мы отметили, что шар является геометрическим телом. Теперь мы докажем это утверждение.

Теорема 1. *Шар есть выпуклое геометрическое тело, поверхностью которого является поверхность шара.*

□ Пусть $\bar{F}$ — данный шар с центром O радиуса r, F — его поверхность, а $\mathring{\bar{F}}$ — множество всех точек, лежащих внутри шара. Докажем сначала, что $\mathring{\bar{F}}$ — открытое множество, т. е. что любая точка $M \in \mathring{\bar{F}}$ является внутренней точкой множества $\mathring{\bar{F}}$. Так как точка M лежит внутри шара $\bar{F}$, то $OM < r$. Рассмотрим ε-окрестность точки M, где $\varepsilon < r - OM$. Тогда любая точка X этой окрестности принадлежит множеству $\mathring{\bar{F}}$, так как $OX \leqslant OM + MX < r$.

Множество $\mathring{\bar{F}}$ является ограниченным, так как все его точки лежат внутри сферы F. Далее, выше было отмечено, что $\mathring{\bar{F}}$ — выпуклое множество, следовательно, $\mathring{\bar{F}}$ — связное множество.

Мы доказали, что $\mathring{\bar{F}}$ — ограниченная область. Остается доказать, что F — граница этой области. Очевидно, каждая точка $M \in F$ является граничной точкой множества $\mathring{\bar{F}}$. С другой стороны, ясно, что точки, принадлежащие множеству $\mathring{\bar{F}}$, а также точки, лежащие вне шара $\bar{F}$, не могут быть граничными точками множества $\mathring{\bar{F}}$, поэтому любая граничная точка множества $\mathring{\bar{F}}$ принадлежит поверхности F. Таким образом, $\bar{F}$ — геометрическое тело с границей F. По доказанному выше, шар — выпуклая фигура, следовательно, $\bar{F}$ — выпуклое тело. ■

2. Сечение шара плоскостями

Плоскость называется *секущей плоскостью шара*, если хотя бы одна точка плоскости является внутренней точкой шара. Очевидно, плоскость α является секущей плоскостью данного шара тогда и только тогда, когда $d < r$, где d — расстояние от центра O шара до плоскости α, а r — радиус шара.

Докажем теорему о сечении шара плоскостью.

Теорема 2. *Сечение шара плоскостью есть круг, центром которого является проекция центра шара на данную плоскость.*

□ Пусть $\bar{F}$ — данный шар с центром O радиуса r, F — поверхность шара, т. е. сфера с центром O радиуса r, α — секущая плоскость, а H — проекция точки O на эту плоскость (рис. 62).

Тогда $OH < r$, поэтому согласно теореме 1 § 23 сечение сферы F плоскостью α есть окружность ω с центром H.

Докажем, что сечение шара $\bar{F}$ плоскостью α есть круг $\bar{\omega}$, границей которого является окружность ω. Докажем сначала, что каждая точка X круга $\bar{\omega}$ принадлежит шару $\bar{F}$. Для этого проведем через точку X какую-нибудь хорду AB окружности ω. Точки A и B принадлежат шару $\bar{F}$, поэтому, учитывая, что $\bar{F}$ — выпуклая фигура, получаем: $X \in \bar{F}$.

Докажем теперь, что если точка Y плоскости α не принадлежит кругу $\bar{\omega}$, то эта точка не является точкой шара $\bar{F}$. Если точка O лежит в плоскости α, то по следствию теоремы 1 § 23 точка O — центр круга $\bar{\omega}$, а r — его радиус, поэтому наше утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда точка O не лежит в плоскости α, т. е. когда точки O и H не совпадают.

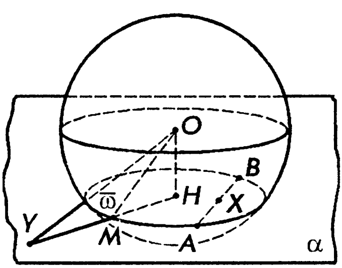


рис. 62

Точка Y не принадлежит кругу $\bar{\omega}$, следовательно, отрезок HY пересекает окружность ω в некоторой точке M (см. рис. 62). В треугольнике OMY угол M — тупой, так как смежный с ним угол HMO — острый. Поэтому $OY > OM$. Но $OM = r$, следовательно, $OY > r$, т. е. точка Y не принадлежит шару $\bar{F}$. ■

Следствие. *Если секущая плоскость проходит через центр O шара радиуса r, то сечение шара плоскостью есть круг с центром O радиуса r.*

Этот круг называется *большим кругом шара*, а его окружность — *большой окружностью*.

3. Шаровой сегмент, шаровой слой и шаровой сектор

Шаровым сегментом данного шара называется часть этого шара, отсекаемая от него какой-нибудь секущей плоскостью, т. е. фигура, образованная пересечением данного шара и замкнутого полупространства, границей которого является секущая плоскость α. Плоскость α разлагает шар на два шаровых сегмента (рис. 63а). Круг, получившийся в сечении, называется *основанием* каждого из этих сегментов, а пересечение поверхности шара с каждым из замкнутых полупространств с границей α — *боковой поверхностью* соответствующего сегмента. На рис. 63а изображен диаметр AB шара, перпендикулярный к секущей плоскости α, которая проходит через точку C этого диаметра. Длины отрезков AC и BC называются *высотами* соответствующих сегментов.

Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоско-

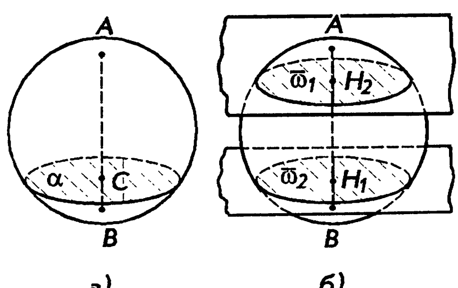


РИС. 63

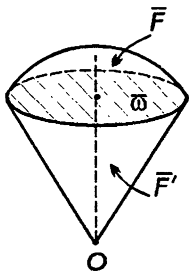


РИС. 64

стями, т. е. фигура, образованная пересечением данного шара и полосы, заключенной между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 63б). Круги, полученные в сечении шара этими плоскостями, называются *основаниями шарового слоя*, а расстояние между плоскостями — *высотой* шарового слоя. Сферическая поверхность шарового слоя называется *шаровым поясом*.

Шаровым сектором данного шара называется фигура, образованная объединением шарового сегмента этого шара, которому не принадлежит центр O шара, и конуса с вершиной O, имеющего общее основание с шаровым сегментом (рис. 64; на этом рисунке $\bar F$ — шаровой сегмент, $\bar F'$ — конус, $\bar\omega$ — их общее основание). Боковая поверхность этого сегмента называется *сферической поверхностью шарового сектора*, а фигура, образованная объединением боковых поверхностей шарового сегмента и конуса,— *поверхностью шарового сектора*. Ясно, что шаровой сектор — это фигура, полученная вращением кругового сектора с углом, меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.

Можно доказать, что *шаровой сегмент, шаровой слой и шаровой сектор являются выпуклыми геометрическими телами*. Эти утверждения доказываются точно так же, как и теорема 1.

§ 37. СФЕРЫ, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО ЦИЛИНДРА, КОНУСА И УСЕЧЕННОГО КОНУСА И ВПИСАННЫЕ В ЭТИ ТЕЛА

1. Сфера, описанная около цилиндра, конуса или усеченного конуса

Сфера называется *описанной* около цилиндра или усеченного конуса, если все точки окружностей оснований принадлежат сфере. Аналогично, сфера называется *описанной* около конуса, если все точки окружности основания, а также вершина конуса принадлежат сфере. В этих случаях говорят, что цилиндр, усеченный конус или конус *вписан* в сферу.

Докажем теорему об описанной сфере.

Теорема 1. *Пусть $\bar{F}$ — цилиндр, конус или усеченный конус. Тогда существует сфера, описанная около тела $\bar{F}$, и притом только одна.*

□ Прежде всего докажем, что существует сфера, описанная около тела $\bar{F}$. Рассмотрим сначала случай, когда $\bar{F}$ — цилиндр или усеченный конус. Пусть $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ — основания тела $\bar{F}$, ω_1 и ω_2 — границы этих оснований, а O_1 и O_2 — их центры. Возьмем на прямой O_1O_2 точку, равноудаленную от концов какой-нибудь образующей AB, где $A \in \omega_1$, $B \in \omega_2$. Такая точка существует, так как прямые AB и O_1O_2 не перпендикулярны, поэтому плоскость, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная к нему, пересекает прямую O_1O_2 в некоторой точке O, которая согласно задаче 1 § 11 равноудалена от точек A и B (рис. 65).

Нетрудно доказать, что все точки окружностей ω_1 и ω_2 равноудалены от точки O. В самом деле, рассмотрим два конуса $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ с общей вершиной O и соответственно основаниями $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$. (На рис. 65 конусы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ не изображены.) Любая образующая конуса $\bar{F}_1$ равна отрезку OA, а любая образующая конуса $\bar{F}_2$ равна отрезку OB. Так как $AO = OB$, то все образующие конусов $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ равны друг другу. Поэтому сфера S с центром O радиуса OA является описанной около тела $\bar{F}$, так как все точки окружностей ω_1 и ω_2 принадлежат сфере S.

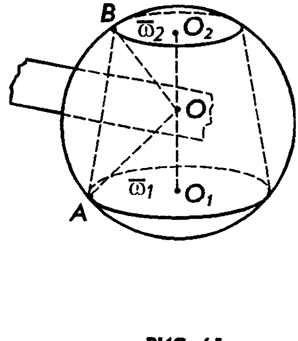


РИС. 65

Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{F}$ — конус с вершиной A и окружностью ω основания с центром C. На прямой AC возьмем точку O, равноудаленную от концов какой-нибудь образующей AB. Аналогично предыдущему легко доказать, что расстояние от любой точки окружности ω до точки O равно OA. Поэтому сфера S с центром O радиуса OA является описанной около конуса $\bar{F}$.

Остается доказать, что S — единственная сфера, описанная около тела $\bar{F}$. Возьмем на окружности основания тела $\bar{F}$ три точки A, B и C, а на окружности другого основания точку D (если $\bar{F}$ — конус, то точка D — вершина этого конуса). Ясно, что четыре точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости и принадлежат сфере S. По лемме § 23 через эти четыре точки проходит единственная сфера, следовательно, S — единственная сфера, проходящая через эти четыре точки. Отсюда следует, что не существует другой сферы, описанной около тела $\bar{F}$. ■

2. Сфера, вписанная в цилиндр, конус или усеченный конус

Отрезок называется *касательной* к сфере, если прямая, которой принадлежит этот отрезок, является касательной к сфере и точка касания лежит на отрезке. Пусть $\bar{F}$ — цилиндр, конус или усеченный конус. Сфера называется *вписанной* в тело $\bar{F}$, если каждая образующая тела $\bar{F}$ является касательной к сфере, а каждая плоскость основания тела $\bar{F}$ касается сферы в точке, лежащей внутри основания. В этом случае говорят также, что тело $\bar{F}$ *описано* около сферы.

Докажем теорему о сфере, вписанной в конус.

Теорема 2. *Существует сфера, вписанная в конус, и притом только одна.*

□ Рассмотрим конус $\bar{F}$ с вершиной O, основанием $\bar{\omega}$ с центром C и углом φ между осью и образующими. Возьмем на отрезке CO точку M, которая делит отрезок CO в отношении $\sin\varphi$, т. е. так, чтобы $CM = OM\sin\varphi$ (рис. 66а). Докажем, что сфера S с центром M радиуса $r = CM$ является вписанной в данный конус. В самом деле, перпендикуляр, проведенный из точки M к плоскости основания $\bar{\omega}$, т. е. отрезок MC равен радиусу r сферы S, поэтому плоскость основания $\bar{\omega}$ есть касательная плоскость к сфере S в точке C (теорема 2 § 23). Далее, пусть OA —

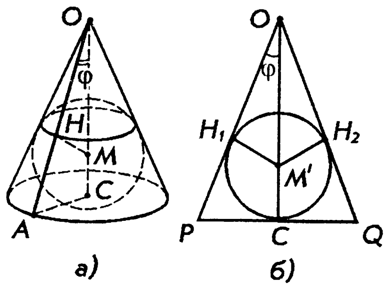


РИС. 66

произвольная образующая конуса $\bar{F}$, а MH — перпендикуляр, проведенный из точки M к прямой OA (см. рис. 66а). Из прямоугольного треугольника OMH имеем: $MH = OM \sin\varphi = r$, поэтому по свойству 3^0 § 23 прямая OA является касательной к сфере S в точке H. Угол HOM — острый и $OH < OM < OA$, следовательно, точка H лежит на отрезке OA. Таким образом, образующая OA является касательной к сфере S. Итак, S — вписанная в конус $\bar{F}$ сфера.

Предположим теперь, что какая-то сфера S' с центром M' также вписана в конус $\bar{F}$. Рассмотрим осевое сечение конуса $\bar{F}$ плоскостью α, проходящей через точку M' и ось OC. По свойству 3^0 § 35 это сечение есть некоторый равнобедренный треугольник OPQ с основанием PQ, равным диаметру конуса $\bar{F}$, и высотой OC. Согласно следствию теоремы 1 § 23 сечение сферы S' плоскостью α есть большая окружность этой сферы с центром M', которая, очевидно, вписана в треугольник OPQ (рис. 66б). Отсюда мы заключаем, что точка M' лежит на отрезке OC и равноудалена от сторон треугольника OPQ; $M'C = M'H_1 = M'H_2$ (см. рис. 66б). Но $M'H_1 = OM' \sin\varphi$, поэтому $CM' = OM' \sin\varphi$. Таким образом, точка M' делит отрезок CO в отношении $\sin\varphi$, т. е. совпадает с точкой M. Итак, сферы S и S' имеют общий центр M и равные радиусы $OM \sin\varphi$, поэтому они совпадают. ■

Как следует из дальнейшего изложения, в отличие от конуса, в произвольный цилиндр или произвольный усеченный конус далеко не всегда можно вписать сферу.

Теорема 3. *В цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его высота равна диаметру оснований. В этом случае вписанная сфера единственная.*

□ Рассмотрим цилиндр $\bar{F}$ радиуса r с осью OO', где O и O' — центры оснований.

Докажем сначала, что если сфера S с центром M радиуса R вписана в цилиндр $\bar{F}$, то $OO' = 2r = 2R$ и M — середина отрезка OO'. Для этого рассмотрим осевое сечение цилиндра $\bar{F}$ плоскостью α, проходящей через точку M и ось OO'. По свойству 3^0 § 34 это сечение есть некоторый прямоугольник $ABCD$, где $AD = BC = 2r$, $AB = DC = OO'$ и точки O и O' — середины отрезков AD и BC (рис. 67).

Согласно следствию теоремы 1 § 23 сечение сферы S плоскостью α есть большая окружность этой сферы с центром M, которая, очевидно, вписана в прямоугольник $ABCD$ (см. рис. 67). Отсюда мы заключаем, что $ABCD$ — квадрат, а точка M — центр этого квадрата, т. е. середина отрезка OO'. Следовательно, $AB = BC = CD = DA = 2r$ и $OO' = AB = 2r = 2R$. Мы

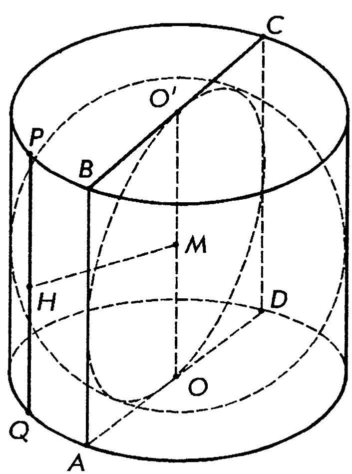


РИС. 67

доказали, что если сфера вписана в данный цилиндр $\bar{F}$, то высота OO' цилиндра равна диаметру его оснований. Так как центр сферы и ее радиус определяются однозначно (M — середина отрезка OO', $R = r$), то вписанная сфера единственная.

Остается доказать, что если высота цилиндра $\bar{F}$ равна диаметрам оснований, т. е. $OO' = 2r$, то в цилиндр $\bar{F}$ можно вписать сферу. Рассмотрим сферу S с центром в середине отрезка OO' радиуса r. Читатель без труда, пользуясь рисунком 67, по аналогии с доказательством соответствующего утверждения теоремы 2, докажет, что сфера S является вписанной в цилиндр $\bar{F}$. ■

Предлагаем читателю, по аналогии с доказательством теоремы 3, доказать следующую теорему самостоятельно.

Теорема 4. *В усеченный конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его образующая равна сумме радиусов оснований. В этом случае вписанная сфера единственная.*

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VII

ЦИЛИНДР И КОНУС

339. Доказать, что прямая, проходящая через внутреннюю точку A цилиндра или конуса, пересекает его полную поверхность в двух и только в двух точках, которые лежат по разные стороны от точки A.

340. Доказать, что если прямая имеет более чем две общие точки с полной поверхностью цилиндра (конуса), то она содержит образующую или хорду основания цилиндра (конуса)

341. Доказать, что любая плоскость, проходящая через ось цилиндра или конуса, является плоскостью симметрии. Имеет ли цилиндр или конус другие плоскости симметрии?

342. Доказать, что плоскость является касательной к цилиндру тогда и только тогда, когда она параллельна оси цилиндра и расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра равно радиусу цилиндра.

343. Доказать, что две непараллельные плоскости, касающиеся цилиндра, пересекаются по прямой, параллельной оси цилиндра.

344. Доказать, что через точку M пространства, расстояние от которой до оси данного цилиндра больше радиуса цилиндра, проходят две и только две касательные плоскости к этому цилиндру.

345. Дан конус с вершиной S и основанием $\bar{\omega}$. Прямая MS не имеет общих точек с кругом $\bar{\omega}$. Доказать, что через точку M проходят две и только две касательные плоскости к данному конусу.

346. Даны два цилиндра, не имеющие общих точек, оси которых параллельны. Доказать, что цилиндры имеют четыре и только четыре общие касательные плоскости.

347. Доказать, что два цилиндра: а) имеющие две общие образующие, имеют две и только две общие касательные плоскости; б) имеющие только одну общую образующую, либо имеют только одну общую касательную плоскость, либо имеют только три общие касательные плоскости.

348. Два цилиндра имеют общую образующую и никаких других общих точек. В общей касательной плоскости α данных цилиндров, не содержащей общую образующую, лежит прямая, имеющая общие точки A и B с данными цилиндрами. Доказать, что отрезок AB делится пополам общей касательной плоскостью β, проходящей через общую образующую цилиндров.

349. В правильный тетраэдр с ребром a вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания, так, что одно из оснований цилиндра содержится в одной из граней тетраэдра, а окружность второго основания касается трех других граней. Найти радиус цилиндра.

350. Центры O и O_1 оснований цилиндра лежат на диагонали AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a; $AO < AO_1$. Одно из оснований касается грани $ABCD$, а другое — грани $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что: а) основания цилиндра касаются соответствующих граней куба с вершинами A и C_1; б) цилиндр симметричен относительно центра куба. Найти радиус цилиндра, если высота и диаметр основания равны.

351. Доказать, что фигура, равная цилиндру с высотой h и радиусом r, является цилиндром с высотой h и радиусом r. Обратно, если радиусы и высоты двух цилиндров соответственно равны, то эти цилиндры равны.

Сформулировать и доказать аналогичные утверждения для конуса.

352. Доказать, что фигура, подобная цилиндру радиуса r и высотой h, есть цилиндр радиуса r' и высотой h', причем $\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h}$. Обратно, если радиусы r и r' и высоты h и h' двух цилиндров удовлетворяют равенству $\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h}$, то эти цилиндры подобны.

Сформулировать и доказать аналогичные утверждения для конуса.

353. Доказать, что цилиндр и конус являются выпуклыми телами, причем любой луч, исходящий из внутренней точки тела, пересекает его полную поверхность в одной и только одной точке.

354. Доказать, что если M_1 и M_2— внутренние точки, а N_1 и N_2— внешние точки относительно цилиндра или конуса, то: а) произвольная ломаная, соединяющая точки M_1 и N_1, пересекает полную поверхность тела по крайней мере в одной точке; б) точки M_1 и M_2 можно соединить ломаной, целиком состоящей из внутренних точек относительно тела; в) точки N_1 и N_2 можно соединить ломаной, целиком состоящей из внешних точек относительно тела.

355. Доказать, что если F — полная поверхность данного цилиндра или конуса $\bar{F}$, то $\bar{F}$ — единственное геометрическое тело с поверхностью F.

356. При каком условии у данного конуса существуют две взаимно перпендикулярные образующие, если: а) образующая конуса равна l, а радиус основания равен R; б) угол между образующими в осевом сечении конуса равен φ?

357. Даны конус и луч, исходящий из вершины конуса, не принадлежащий оси конуса и никакой прямой, содержащей образующую конуса. Доказать, что из всех образующих конуса наибольший и наименьший углы с данным лучом составляют образующие, лежащие в одной плоскости с этим лучом и осью конуса.

358. Доказать, что через каждую точку боковой поверхности конуса, отличную от вершины, проходит одна и только одна касательная плоскость, причем эта плоскость содержит образующую конуса, проходящую через данную точку, и перпендикулярна к плоскости, проходящей через данную точку и ось конуса.

359. Два конуса с общей вершиной имеют одну и только одну общую образующую. Доказать, что: а) общая образующая и центры оснований конусов лежат в одной плоскости; б) через их общую образующую проходит общая касательная плоскость; в) основания конусов имеют общую касательную.

360. Вершина S конуса лежит на ребре SA данного двугранного угла, центр основания является внутренней точкой двугранного угла, а плоскость каждой грани двугранного угла является касательной плоскостью к конусу. Доказать, что: а) полуплоскость с границей, совпадающей с ребром двугранного угла, которой принадлежит центр основания, является биссектральной полуплоскостью этого угла; б) углы между образующими, по которым грани касаются конуса, и лучом SA равны.

361. В конус с радиусом R и высотой H вписан цилиндр с радиусом r и высотой h так, что плоскость одного из оснований цилиндра совпадает с плоскостью основания конуса, а окружность другого основания цилиндра принадлежит боковой поверхности конуса. Доказать, что $\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = 1$.

362. Доказать, что если боковые поверхности цилиндра и конуса, оси которых совпадают, имеют хотя бы одну общую точку, то линия их пересечения является окружностью.

СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА И КОНУСА ПЛОСКОСТЯМИ

363. Высота цилиндра равна 8 см, а радиус равен 5 см. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра равно 3 см.

364. Через данную образующую цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Найти отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если угол между секущими плоскостями равен φ.

365. Доказать, что сечение цилиндрической поверхности плоскостью, пересекающей ось в точке O, есть эллипс с центром O.

366. Доказать, что сечение цилиндра плоскостью, которая не содержит ни одной внутренней точки оснований цилиндра, есть плоская фигура, ограниченная эллипсом.

367. Найти длины осей эллипса, который является сечением цилиндрической поверхности (см. задачу 365) радиуса r плоскостью, пересекающей ось поверхности под углом φ, $\varphi < 90°$.

368. Высота конуса равна h, а угол между высотой и образующей конуса равен $60°$. Доказать, что у данного конуса существуют две взаимно перпендикулярные образующие. Найти площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через эти образующие, и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

369. Доказать, что площади сечений конуса двумя плоскостями, перпендикулярными к оси конуса, относятся как квадраты расстояний от вершины конуса до этих плоскостей.

370. Через вершину конуса проведены две плоскости, которые отсекают на основании конуса равные хорды. Доказать, что сечения конуса этими плоскостями равны.

371. Доказать, что угол между образующими осевого сечения конуса больше, чем угол между двумя образующими, не лежащими в одной плоскости с его осью.

372. Выяснить, в каком случае треугольник, полученный в сечении конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, имеет наибольшую площадь.

373. Доказать, что сечение конической поверхности плоскостью, пересекающей ось в точке, отличной от вершины, есть эллипс.

374. Доказать, что сечение конуса плоскостью, которая не содержит ни одной внутренней точки основания конуса, есть плоская фигура, ограниченная эллипсом.

375. Доказать, что усеченный конус есть выпуклое тело, причем если F — полная поверхность данного усеченного конуса $\bar{F}$, то $\bar{F}$ — единственное геометрическое тело с поверхностью F.

376. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, где $R > r$, а образующая l. Найти образующую и высоту конуса, от которого отделен усеченный конус.

377. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 11 см, а образующая равна 10 см. Найти высоту усеченного конуса и площадь осевого сечения.

378. Угол между прямой, содержащей образующую усеченного конуса, равную l, и плоскостью большего основания равен φ, а радиус меньшего основания равен r. Найти площадь сечения усеченного конуса плоскостью, содержащей высоту.

379. Отношение радиусов оснований усеченного конуса равно 3, угол между прямой, содержащей образующую, и плоскостью большего основания равен 45°, а высота равна h. Найти площади оснований.

380. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, $R > r$, а образующая равна l. Высота разделена на три равные части и через точки деления проведены секущие плоскости, параллельные основаниям. Найти площади полученных сечений.

381. Радиусы оснований усеченного конуса равны 11 см и 27 см, образующая относится к высоте, как 17 : 15. Найти площадь сечения плоскостью, содержащей высоту усеченного конуса.

382. Диагональ сечения усеченного конуса плоскостью, содержащей высоту, делится высотой на отрезки, равные $6\frac{7}{8}$ см и $13\frac{1}{8}$ см. Образующая усеченного конуса равна 13 см. Найти радиусы оснований.

383. Площадь сечения усеченного конуса плоскостью, проходящей через его высоту, равна S. Найти площадь сечения плоскостью, которая проходит через точку пересечения продолжений образующих, содержит хорду основания, стягивающую дугу с градусной мерой 2α, где $\alpha < 90^\circ$, и образует угол β с плоскостью основания усеченного конуса.

384. Доказать, что все отрезки, концы которых лежат на окружностях разных оснований усеченного конуса и которые пересекают его высоту, равны. При этом каждый из этих отрезков больше любого другого отрезка, концы которого принадлежат разным основаниям.

385. Доказать, что фигура, равная усеченному конусу, является усеченным конусом с той же высотой и с теми же радиусами оснований. Обратно, если высоты и радиусы оснований двух усеченных конусов соответственно равны, то эти усеченные конусы равны.

386. Доказать, что фигура, подобная усеченному конусу высотой h и радиусами оснований R и r, есть усеченный конус с высотой h' и радиусами оснований R' и r', причем $\frac{h'}{h} = \frac{R'}{R} = \frac{r'}{r}$. Обратно, если высота и радиусы оснований двух усеченных конусов пропорциональны, то эти усеченные конусы подобны.

ШАР. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ СФЕРЫ

387. Доказать, что плоскость, проходящая через центр шара, является плоскостью симметрии шара и его поверхности и центр шара является центром симметрии шара и его поверхности.

388. Доказать, что фигура, состоящая из множества центров всех равновеликих сечений данного шара, отличных от больших кругов, есть сфера.

389. Плоскость, не проходящая через центр O данного шара радиуса R, проходит через точку M, принадлежащую поверхности шара. Найти радиус и площадь сечения, если угол между прямой OM и данной плоскостью равен φ, $\varphi < 90°$.

390. Точка A лежит внутри данного шара и не совпадает с его центром O, а точка B не лежит на прямой AO. Доказать, что существует единственная плоскость, проходящая через точки A и B и пересекающая шар по сечению наименьшей площади.

391. Расстояние между двумя параллельными секущими плоскостями данного шара равно 3 см. Найти радиус шара, если площади сечений равны 81π см^2 и 144π см^2.

392. Доказать, что из всех сечений шара плоскостями, проходящими через одну и ту же внутреннюю точку шара, отличную от центра шара, наименьшую площадь имеет сечение, плоскость которого перпендикулярна к радиусу, проведенному через эту точку.

393. Доказать, что шаровой сегмент, шаровой слой и шаровой сектор являются выпуклыми геометрическими телами.

394. Доказать, что при преобразовании подобия с коэффициентом k шар радиуса R переходит в шар радиуса kR. Обратно, любые два шара с радиусами R и R' подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{R'}{R}$.

395. Дан шаровой сегмент с высотой h, радиусом основания r и радиусом боковой поверхности R. Доказать, что $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$, $r = \sqrt{2Rh - h^2}$, $h = R + \varepsilon\sqrt{R^2 - r^2}$, где $\varepsilon = +1$, если $h \geqslant R$, и $\varepsilon = -1$, если $h \leqslant R$.

396. Доказать, что два шаровых сегмента равны тогда и только тогда, когда равны их высоты и радиусы оснований.

397. Дан конус с высотой h и радиусом основания a. Найти радиусы сфер, описанной около конуса и вписанной в конус.

398. Радиусы оснований усеченного конуса с высотой H равны r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$). Найти радиус сферы, описанной около этого усеченного конуса.

399. Доказать, что фигура, состоящая из всех точек сферы, вписанной в цилиндр, конус или усеченный конус, каждая из которых является точкой касания сферы с боковой поверхностью данного тела, есть окружность. Плоскость этой окружности перпендикулярна к прямой l, а центр лежит на этой прямой. Здесь l — ось цилиндра или конуса или прямая, содержащая высоту усеченного конуса.

400. Высота конуса в четыре раза больше радиуса сферы, вписанной в этот конус. Длина образующей конуса равна l. Найти радиус сферы, описанной около конуса.

401. Конус, образующая которого равна диаметру основания, секущей плоскостью, параллельной основанию, разложен на усеченный конус, в который вписана сфера, и другой конус, в который также вписана сфера. Найти отношение радиусов этих сфер.

402. В сферу радиуса $2\sqrt{5}$ см вписан цилиндр, высота которого в три раза больше диаметра его основания. Найти образующую усеченного конуса, вписанного в эту сферу, одно основание которого совпадает с основанием цилиндра, а плоскость другого основания проходит через центр сферы.

403. Доказать, что в усеченный конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его образующая равна сумме радиусов оснований. В этом случае вписанная сфера единственная.

404. Доказать, что в усеченный конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда половина высоты усеченного конуса есть среднее пропорциональное между радиусами оснований. Найти радиус сферы, вписанной в усеченный конус, радиусы оснований которого равны 5 см и 8 см.

Глава VIII

ОБЪЕМ ТЕЛА И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

§ 38. ОБЪЕМ ТЕЛА

1. Разложение тела секущей плоскостью

В этой главе мы введем понятие объема тела и выведем формулы для вычисления объемов простейших тел по элементам, их определяющим. Для этого необходимо предварительно ввести ряд вспомогательных понятий.

Плоскость называется *секущей плоскостью* данного тела, если хотя бы одна из внутренних точек тела лежит в этой плоскости. Плоская фигура, образованная пересечением тела с секущей плоскостью, называется *сечением тела* этой плоскостью.

Пусть α — секущая плоскость тела $\bar{F}$, $\bar{\omega}$ — сечение этого тела плоскостью α, а $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ — два замкнутых полупространства с общей границей α. Рассмотрим фигуры $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, точками которых являются те и только те точки тела $\bar{F}$, которые принадлежат соответственно полупространствам $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$. Если фигуры $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ являются геометрическими телами, то будем говорить, что тело $\bar{F}$ секущей плоскостью α *разложено на два тела* $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, и записывать так: $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$. Ясно, что тела $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ не имеют общих внутренних точек, и множество их общих точек совпадает со множеством всех точек сечения $\bar{\omega}$.

Имеет место следующее наглядно очевидное утверждение, доказательство которого мы опускаем.

Лемма. *Произвольная секущая плоскость выпуклого тела разлагает его на два тела, каждое из которых является выпуклым.*

На рис. 61 с. 201 конус с основанием в плоскости α секущей плоскостью β разложен на два тела — на конус с основанием в плоскости β и на усеченный конус. На рис. 63а с. 205 шар разложен на два шаровых сегмента с общим основанием. В общем случае не любая секущая плоскость разлагает тело на два тела. Например, на рис. 68 плоскость α разлагает изображенное на нем тело на три тела.

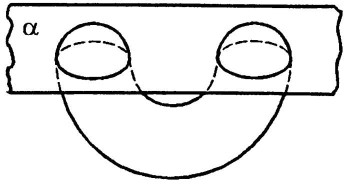


РИС. 68

Для дальнейшего изложения нам необходимо обобщить понятие разложения тела. Будем говорить, что тело $\bar{F}$ разложено на тела $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_k$, где $k > 2$, если $\bar{F} = ((((\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + \bar{F}_3) + \ldots) + \bar{F}_k)$. На рис. 63б с. 205 шар разложен на три тела — на два шаровых сегмента с основаниями $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ и на шаровой слой.

2. Понятие объема тела

В элементарной геометрии ограничиваются весьма узким классом тел, для которых вводится понятие объема. Эти тела мы называем *простейшими телами* и их множество обозначаем через W. Элементами множества W являются любой простой многогранник, в частности выпуклый многогранник, любое круглое тело, т. е. цилиндр, конус, шар, а также любое тело, которое получено разложением некоторого тела из W или которое может быть разложено на два тела из W. Например, шаровой сегмент, шаровой слой, а также усеченный конус являются простейшими телами и принадлежат множеству W. Другим примером тела, принадлежащего множеству W, является шаровой сектор (см. рис. 64 с. 206), так как он плоскостью круга $\bar{\omega}$ разлагается на два тела из множества W — на шаровой сегмент $\bar{F}$ с основанием $\bar{\omega}$ и на конус $\bar{F}'$ с тем же основанием и с вершиной O. В этой главе для простоты изложения простейшие тела без особых оговорок будем называть телами.

Сформулируем теперь задачу измерения объемов тел, предполагая, что в пространстве выбран единичный отрезок и введено измерение отрезков и измерение площадей многоугольников.

Пусть каждому телу соответствует определенное действительное положительное число так, что выполняются следующие основные свойства:

V_1. Равным телам соответствует одно и то же число.

V_2. Если тело $\bar{F}$ разложено на два тела $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ и телам $\bar{F}$, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ соответствуют числа a, b, c, то $a = b + c$.

V_3. Кубу, ребром которого является единичный отрезок, соответствует число, равное единице.

В этом случае говорят, что *установлено измерение объемов тел*. Положительное число, соответствующее данному телу $\bar{F}$, называется его *объемом* и обозначается через $V(\bar{F})$.

Имеет место следующая важная теорема, которую мы приводим без доказательства[1].

Теорема. *Если выбран единичный отрезок, то существует одно и только одно соответствие между множеством всех простейших тел и множеством действительных положительных чисел, при котором выполняются основные свойства* V_1, V_2, V_3 *измерения объемов.*

Сформулируем два следствия из этой теоремы, первое из которых непосредственно следует из основного свойства V_2, а второе может быть доказано, используя это свойство:

Следствие 1. *Если простейшее тело $\bar{F}$ разложено на тела $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ... , $\bar{F}_k$, где $k \geqslant 2$, то $V(\bar{F}) = V(\bar{F}_1) + V(\bar{F}_2) + ... + V(\bar{F}_k)$.*

Следствие 2. *Если простейшие тела $\bar{F}$ и $\bar{F}'$ не совпадают и тело $\bar{F}$ состоит из точек, принадлежащих телу $\bar{F}'$, то $V(\bar{F}) < V(\bar{F}')$.*

3. Объем многогранника

Простые многогранники принадлежат множеству W, поэтому предыдущая теорема применима к ним, т. е. существует объем любого простого многогранника. Отметим, что имеется определенная аналогия между понятиями объема многогранника и площади многоугольника. В самом деле, задача измерения объемов, сформулированная выше, применительно к многогранникам, аналогична задаче измерения площадей многоугольников (п. 1 § 28 [7]). Далее,

---

[1] Доказательство теоремы для многогранников можно найти в книге [1], с. 241.

предыдущая теорема, применительно к многогранникам, аналогична теореме 1 § 28 [7].

Для вывода формул вычисления объемов простейших многогранников мы поступим по аналогии с выводами формул для вычисления площадей многоугольников. Как известно, в основе вычисления площади произвольного многоугольника лежит теорема о площади прямоугольника (теорема 1 § 29 [7]). Здесь для вычисления объемов простейших многогранников мы используем теорему о вычислении объема прямоугольного параллелепипеда, которая доказана в следующем параграфе. Прямоугольный параллелепипед является пространственной фигурой, аналогичной прямоугольнику на плоскости.

Следует, однако, учесть, что теории объемов и площадей имеют и существенные отличия, поэтому в теории объемов не удается, зная формулу для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда, достаточно просто вычислить объем произвольного простого многогранника. Уже объем тетраэдра вычислить довольно сложно.

Дело в том, что при вычислении площадей многоугольников мы пользуемся утверждением о том, что любые два многоугольника равновелики (т. е. имеют равные площади) тогда и только тогда, когда они равносоставлены (т. е. могут быть разложены на попарно равные многоугольники). Пользуясь этим, для вычисления площади данного многоугольника мы строим равновеликий с ним прямоугольник и вычисление площади многоугольника сводим к вычислению площади этого прямоугольника. Аналогичный прием не удается применить при вычислении объемов многогранников, так как в пространстве не любые два равновеликих многогранника (т. е. имеющих равные объемы) равносоставлены (т. е. могут быть разложены на попарно равные многогранники). Имеет место следующая теорема, которая была доказана в 1900 г. М. Деном: *пусть двугранные углы многогранника* $\bar{F}$ *равны* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$, *а двугранные углы многогранника* $\bar{F}'$ *равны* $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_s$. *Если многогранники* $\bar{F}$ *и* $\bar{F}'$ *равносоставлены, то существуют такие положительные числа* $m_1, m_2, \dots, m_r$ *и* $n_1, n_2, \dots, n_s$ *и целое число* c, *что*

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \dots + m_r\alpha_r -$$
$$- (n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + \dots + n_s\beta_s) = \pi c. \qquad (1)$$

Эта теорема выражает необходимое условие равносоставленности двух равновеликих многогранников. В 1965 г. французский математик Сидлер доказал, что условие Дена является и достаточным.

Существуют равновеликие многогранники, для которых не выполняется условие (1), таковыми являются, например, правильный тетраэдр и прямоугольный параллелепипед, имеющий равный с ним объем. Вследствие этого при вычислении объема тетраэдра и вообще любой пирамиды нельзя применить метод, аналогичный тому, которым мы пользовались, например, для вычисления площади треугольника. Поэтому при вычислении объема пирамиды или произвольной призмы применение теории пределов или интегрального исчисления в той или иной форме является неизбежным.

§ 39. ОБЪЕМ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ И ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

1. Объем прямоугольного параллелепипеда

В этом параграфе мы выведем известную из курса средней школы формулу для вычисления объема V прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c: $V = abc$. Для этого воспользуемся следующей леммой, которую легко докажет читатель самостоятельно.

Лемма. *Пусть ребро прямоугольного параллелепипеда $\bar{F}$ разделено на n равных частей $n-1$ плоскостями, перпендикулярными к этому ребру. Тогда данные плоскости разлагают параллелепипед $\bar{F}$ на n равных друг другу прямоугольных параллелепипедов, объем каждого из которых равен $\frac{1}{n}V(\bar{F})$.*

Прямоугольный параллелепипед является простым многогранником, поэтому согласно теореме § 38 имеет объем. Докажем теорему о вычислении его объема.

Теорема 1. *Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.*

□ Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $\bar{F} = \overline{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ и докажем, что $V(\bar{F}) = abc$, где $a = AB$, $b = AD$, $c = AA_1$. Доказательство теоремы проведем в три этапа.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $a = b = 1$. Докажем, что в этом случае $V(\bar{F}) = c$. Если $c = 1$, то эта формула непосредственно следует из основного свойства V_3, а если $c = n$ — целое число, $n > 1$, то, используя предыдущую лемму, легко приходим к искомой формуле.

Докажем формулу $V(\bar{F}) = c$ для случая, когда $c = \frac{p}{q}$ — рациональное число (p и q — натуральные числа, $q > 1$). Рассмотрим параллелепипед $\bar{F}' = \overline{ABCDA'B'C'D'}$, где C' — точка луча CC_1, причем $CC' = q \cdot \frac{p}{q} = p$. Тогда по доказанному $V(\bar{F}') = p$. Следовательно, применив предыдущую лемму к этому параллелепипеду, получим: $V(\bar{F}') = q \cdot V(\bar{F})$, т. е. $V(\bar{F}) = \frac{p}{q} = c$.

Рассмотрим теперь случай, когда c — иррациональное число. Допустим, что $V(\bar{F}) \neq c$. Пусть для определенности $V(\bar{F}) - c = \varepsilon > 0$. Подберем рациональные числа r_1 и r_2 так, чтобы $r_1 < c < r_2$, $r_2 - r_1 < \varepsilon$. Рассмотрим прямоугольные параллелепипеды $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ с общим основанием $ABCD$ и боковыми ребрами, равными соответственно r_1 и r_2 (рис. 69). По следствию 2 теоремы § 38 $V(\bar{F}_1) < V(\bar{F}) < V(\bar{F}_2)$. Согласно предыдущему $V(\bar{F}_1) = r_1$, $V(\bar{F}_2) = r_2$, поэтому $r_1 < V(\bar{F}) < r_2$. Таким образом, $V(\bar{F}) - c < r_2 - r_1$ или $\varepsilon < r_2 - r_1$. Это противоречит неравенству $\varepsilon > r_2 - r_1$, следовательно, наше предположение неверно и $V(\bar{F}) = c$.

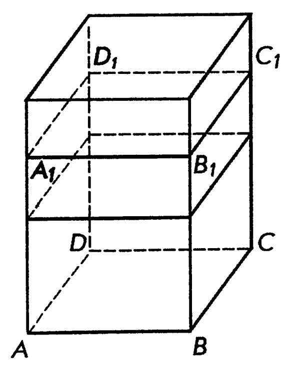


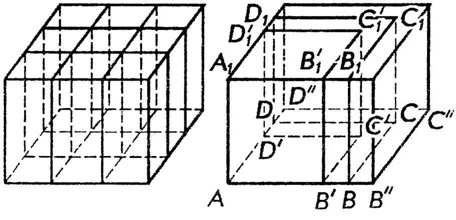
РИС. 69

2. Рассмотрим теперь случай, когда $a = b \neq 1$. Докажем, что в этом случае

$V = a^2c$. Если $a = b = n$ — натуральное число, $n > 1$, то, используя дважды предыдущую лемму (рис. 70а), мы приходим к искомой формуле.

Докажем равенство $V = a^2c$ для случая, когда $a = b = \frac{p}{q}$ — рациональное число (p, q — натуральные числа, $q > 1$). Рассмотрим параллелепипед $\bar{F}' = \overline{AB'C'D'A_1B_1'C_1'D_1'}$, где B' и D' — точки соответственно лучей AB и AD, и $AB' = AD' = qa = p$. Тогда по предыдущему $V(\bar{F}') = p^2c$. Так как параллелепипед $\bar{F}'$ разложен на q^2 параллелепипедов, каждый из которых равен параллелепипеду $\bar{F}$, то по следствию 1 теоремы § 38 $V(\bar{F}') = q^2V(\bar{F})$, поэтому $V(\bar{F}) = \frac{p^2c}{q^2} = a^2c$.

Докажем теперь равенство $V = a^2c$ для случая, когда $a = b$ — иррациональное число. Допустим, что $V(\bar{F}) \neq a^2c$, тогда $\sqrt{V(\bar{F})} \neq a\sqrt{c}$. Пусть для определенности $\sqrt{V(\bar{F})} - a\sqrt{c} = \varepsilon\sqrt{c} > 0$. Подберем рациональные числа r_1 и r_2 так, чтобы $r_1 < a < r_2$ и $r_2 - r_1 < \varepsilon$. Рассмотрим прямоугольные параллелепипеды $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ с боковым ребром AA_1 и квадратными основаниями $AB'C'D'$ и $AB''C''D''$, где $AB' = r_1$, $AB'' = r_2$ (рис. 70б). Согласно предыдущему $V(\bar{F}_1) = r_1^2c$, $V(\bar{F}_2) = r_2^2c$. По следствию 2 теоремы § 38 $V(\bar{F}_1) < V(\bar{F}) < V(\bar{F}_2)$ или $r_1^2c < V(\bar{F}) < r_2^2c$, $r_1\sqrt{c} < \sqrt{V(\bar{F})} < r_2\sqrt{c}$. Но $r_1 < a < r_2$ или $r_1\sqrt{c} < a\sqrt{c} < r_2\sqrt{c}$. Таким образом, $\sqrt{V(\bar{F})} - a\sqrt{c} < (r_2 - r_1)\sqrt{c}$ или $\varepsilon\sqrt{c} < (r_2 - r_1)\sqrt{c}$, $\varepsilon < r_2 - r_1$. Это противоречит неравенству $\varepsilon > r_2 - r_1$, следовательно, наше предположение неверно и $V(\bar{F}) = a^2c$.



а) б)

рис. 70

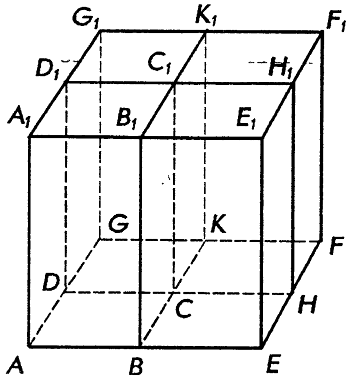


Рис. 71

3. Рассмотрим, наконец, общий случай, когда a, b и c — произвольные положительные числа. Докажем, что $V(\overline{F}) = abc$.

На лучах AB и AD отложим соответственно отрезки AE и AG, равные $a + b$, и построим квадрат $AEFG$, а затем прямоугольный параллелепипед $\overline{F}' = \overline{AEFGA_1E_1F_1G_1}$ с квадратным основанием $AEFG$ (рис. 71). Плоскости BCB_1 и DCD_1 разлагают этот параллелепипед на четыре прямоугольных параллелепипеда $\overline{F}$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, где $\overline{F}_1$ — параллелепипед с основанием $CHFK$, равный данному параллелепипеду $\overline{F}$, а $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$ — параллелепипеды с квадратными основаниями $BEHC$ и $DCKG$. По следствию 1 теоремы § 38 $V(\overline{F}') = V(\overline{F}) + V(\overline{F}_1) + V(\overline{F}_2) + V(\overline{F}_3) = 2V(\overline{F}) + V(\overline{F}_1) + V(\overline{F}_2)$. Согласно доказанному в случае 2 $V(\overline{F}') = (a + b)^2c$, $V(\overline{F}_2) = b^2c$, $V(\overline{F}_3) = a^2c$. Подставив эти значения в предыдущее равенство, получаем: $V(\overline{F}) = abc$. ■

Следствие. *Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.*

2. Объем прямой призмы

Теорема 2. *Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.*

□ Пусть $\overline{F}$ — данная n-угольная прямая призма с основанием P и высотой h. Докажем, что $V(\overline{F}) =$

$= S(P) \cdot h$, где $S(P)$ — площадь n-угольника P. Доказательство теоремы проведем в три этапа.

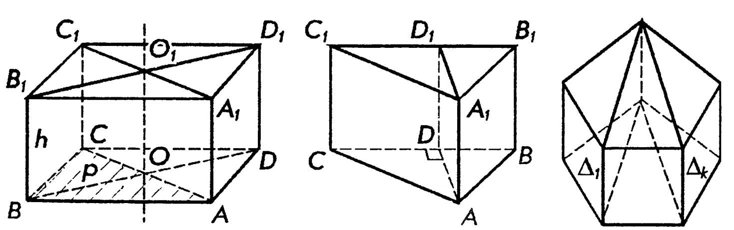
1. $\overline{F}$ — прямая треугольная призма, основанием P которой является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B.

Достроим треугольник ABC до прямоугольника $ABCD$, а данную призму $\overline{F} = \overline{ABCA_1B_1C_1}$ до прямоугольного параллелепипеда $\overline{\Phi} = \overline{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ с основанием $ABCD$ и высотой h (рис. 72а). Плоскость ACC_1 разлагает параллелепипед $\overline{\Phi}$ на две прямые призмы: $\overline{F}$ (данная призма) и $\overline{F}'$ с основанием ACD. Эти призмы равны, так как при симметрии относительно прямой OO_1, проходящей через середины отрезков AC и A_1C_1, одна из них переходит в другую.

По основным свойствам V_1 и V_2 имеем: $V(\overline{F}) = V(\overline{F}')$ и $V(\overline{\Phi}) = V(\overline{F}) + V(\overline{F}')$, поэтому $V(\overline{\Phi}) = 2V(\overline{F})$ или $V(\overline{F}) = \frac{1}{2}V(\overline{\Phi})$. По следствию предыдущей теоремы $V(\overline{\Phi}) = S(ABCD) \cdot h$, где $S(ABCD)$ — площадь прямоугольника $ABCD$. Учитывая, что $S(ABCD) = 2S(ABC) = 2S(P)$, получаем: $V(\overline{F}) = S(P) \cdot h$.

2. $\overline{F}$ — прямая треугольная призма, основанием P которой является треугольник ABC.

В треугольнике ABC хотя бы одна высота, например высота AD, разлагает его на два прямоугольных треугольника ABD и ACD (рис. 72б). Тогда плоскость ADA_1 разлагает данную призму $\overline{F} = \overline{ABCA_1B_1C_1}$ на две



а) б) в)

Рис. 72

прямые треугольные призмы $\bar{F}_1 = \overline{ABDA_1B_1D_1}$ и $\bar{F}_2 = \overline{ACDA_1C_1D_1}$, основаниями которых являются прямоугольные треугольники ABD и ACD, а высоты равны h. По основному свойству V_2 $V(\bar{F}) = V(\bar{F}_1) + V(\bar{F}_2)$, а по доказанному $V(\bar{F}_1) = S(ABD)h$, $V(\bar{F}_2) = S(ACD)h$. Таким образом, $V(\bar{F}) = S(ABD)h + S(ACD)h = S(ABC)h = S(P)h$.

3. $\bar{F}$ — произвольная прямая n-угольная призма, где $n > 3$.

Основание P призмы $\bar{F}$ можно разложить на k треугольников: $P = \Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_k$ (рис. 72в). Тогда данную призму $\bar{F}$ можно разложить на k прямых треугольных призм $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ... , $\bar{F}_k$, основаниями которых являются треугольники Δ_1, ... , Δ_k, а высота каждой призмы равна высоте h данной призмы $\bar{F}$: $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... + \bar{F}_k$. По следствию 1 теоремы § 38 $V(\bar{F}) = \sum\limits_{i=1}^{k} V(\bar{F}_i)$. Из доказанного выше следует, что $V(\bar{F}_i) = hS(\Delta_i)$, поэтому $V(\bar{F}) = h\sum\limits_{i=1}^{k} S(\Delta_i) = hS(P)$. ■

3. Объем цилиндра

Цилиндр является простейшим телом, поэтому согласно теореме § 38 существует его объем. Пользуясь теоремой 2, выведем формулу для вычисления объема цилиндра по элементам, его определяющим. Для этого введем понятия призмы, вписанной в цилиндр, и призмы, описанной около цилиндра. Правильную n-угольную призму назовем *вписанной* в данный цилиндр (*описанной* около данного цилиндра), если основанием призмы служит правильный n-угольник, вписанный в основание цилиндра (описанный около основания цилиндра), а высотой — высота цилиндра.

Теорема 3. *Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.*

□ Рассмотрим цилиндр $\bar{F}$ с основанием P радиуса r и высотой h и докажем, что $V(\bar{F}) = S(P)h$.

Пусть $\bar{\Phi}_n$ — правильная n-угольная призма, вписанная в цилиндр $\bar{F}$, а $\bar{F}_n$ — цилиндр, для которого $\bar{\Phi}_n$ является описанной призмой (рис. 73). Если r_n —

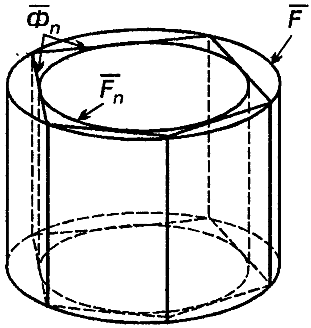


РИС. 73

радиус цилиндра $\overline{F}_n$, то, очевидно, r_n является радиусом окружности, вписанной в основание призмы $\overline{\Phi}_n$. Согласно формулам (1) и (3) § 52 [7]:

$$S_n = \frac{1}{2}P_n r_n, \qquad (1)$$

$$r_n = r\cos\frac{180^\circ}{n}. \qquad (2)$$

Здесь S_n и P_n — соответственно площадь и периметр основания призмы $\overline{\Phi}_n$.

Рассмотрим бесконечные последовательности $\overline{\Phi}_3$, $\overline{\Phi}_4$, ... , $\overline{\Phi}_n$, ... и $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, ... , $\overline{F}_n$, ... Так как для любого n $\overline{F}_n \subset \overline{\Phi}_n \subset \overline{F}$, то по следствию 2 теоремы § 38

$$V(\overline{F}_n) < V(\overline{\Phi}_n) < V(\overline{F}). \qquad (3)$$

Согласно формуле (2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, т. е. при $n \to \infty$ радиус цилиндра $\overline{F}_n$ стремится к r. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} V(\overline{F}_n) = V(\overline{F})$. Отсюда, учитывая неравенства (3), которые верны для любого n, мы заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} V(\overline{\Phi}_n) = V(\overline{F})$. По теореме 2, используя формулы (1) и (2), получаем: $V(\overline{\Phi}_n) = S_n h = \frac{1}{2}P_n r_n h = \frac{1}{2}P_n \cdot r \times \times \cos\frac{180^\circ}{n}h$. Таким образом, $V(\overline{F}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}P_n r\cos\frac{180^\circ}{n}h = = \frac{1}{2}rh\lim\limits_{n\to\infty}P_n\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{180^\circ}{n}$. Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{180^\circ}{n} =$

$= 1$ и по определению длины окружности $\lim\limits_{n\to\infty} P_n =$ $= 2\pi r$, окончательно получаем: $V(\bar{F}) = \pi r^2 h$, т. е. $V(\bar{F}) = S(P)h$. ■

§ 40. ОБЪЕМЫ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ, ПИРАМИДЫ И УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

1. Вычисление объема тела с помощью определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно вывести формулу для вычисления объемов некоторых простейших тел, изучаемых в элементарной геометрии. Предварительно введем следующее понятие. Плоскость назовем *опорной плоскостью* данного тела, если она имеет с телом хотя бы одну общую точку и тело целиком содержится в замкнутом полупространстве, границей которого является данная плоскость. Например, любая касательная плоскость к шару является его опорной плоскостью. Аналогично, любая касательная плоскость к цилиндру или к конусу является опорной плоскостью. Опорными плоскостями конуса, кроме касательных плоскостей, являются плоскость основания, а также любая плоскость, проходящая через вершину и не имеющая с конусом общих точек, кроме вершины.

Пусть $\bar{F}$ — данное простейшее тело, а α_1 и α_2 — параллельные опорные плоскости, расстояние между которыми равно h. Тогда, очевидно, все точки тела $\bar{F}$ принадлежат замкнутой полосе Ω между плоскостями α_1 и α_2, т. е. множеству $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, где Ω_1 — замкнутое полупространство с границей α_1, содержащее α_2, а Ω_2 — замкнутое полупространство с границей α_2, содержащее α_1 (рис. 74).

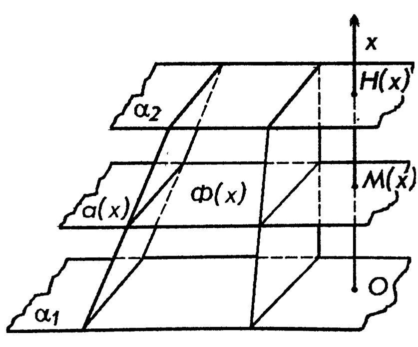


РИС. 74

Введем координатную ось Ox, перпендикулярную к плоскостям α_1 и α_2, выбрав начало O в плоскости α_1, а направление оси так, чтобы точка H пересечения плоскости α_2 с осью Ox имело координату h. Обозначим через $\alpha(x)$ плоскость, перпендикулярную к оси Ox и пересекающую ее в точке $M(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant h$, а через $\Phi(x)$ — фигуру, образованную пересечением тела $\bar{F}$ с плоскостью $\alpha(x)$. Мы предполагаем, что выполняются следующие два условия:

1. Фигуры $\Phi(x)$ для всех $x \in [0, h]$ являются либо одноименными многоугольниками, либо кругами (при $x = 0$ или $x = h$ фигура $\Phi(x)$ может вырождаться в точку).

2. Площадь $S(x)$ фигуры $\Phi(x)$ на отрезке $[0, h]$ является непрерывной функцией от x (если $\Phi(x)$ при $x = 0$ или $x = h$ является точкой, то считаем, что $S(x) = 0$).

В курсе математического анализа доказывается[1], что при выполнении этих условий объем $V(\bar{F})$ тела $\bar{F}$ вычисляется по формуле:

$$V(\bar{F}) = \int_0^h S(x)dx. \tag{1}$$

Здесь h — расстояние между параллельными опорными плоскостями α_1 и α_2.

Ниже мы воспользуемся этой формулой для вычисления объемов простейших тел по элементам, их определяющим.

2. Объем наклонной призмы

Теорема 1. *Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.*

□ Рассмотрим наклонную призму $\bar{F}$ с основанием P и высотой h и докажем, что $V(\bar{F}) = S(P)h$.

Плоскости α_1 и α_2 оснований призмы $\bar{F}$ являются параллельными опорными плоскостями этой призмы, и расстояние между ними равно h. Введем координатную ось Ox перпендикулярно к плоскости α_1 так, чтобы точка O лежала в плоскости α_1, а точка H пересечения плоскости α_2 с осью Ox имела координату h. Обозначим через $\alpha(x)$ плоскость, перпендикулярную к оси Ox и пересекающую ее в точке $M(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant h$. Обозначим через N точку пересечения плоскости $\alpha(x)$ с боковым ребром AB призмы $\bar{F}$ (рис. 75). Пусть $\Phi(x)$ — фигура, образованная пересечением призмы $\bar{F}$ с плоскостью $\alpha(x)$,

---

[1] См., например, [21], § 55, а также [2], § 43.

а $S(x)$ — площадь этой фигуры. Так как $\Phi(x)$ получена из многоугольника P параллельным переносом на направленный отрезок $\overline{AN}$, то для любого x имеем: $\Phi(x) = P$, поэтому $S(x) = S(P)$. Следовательно, в данном случае условия 1 и 2 предыдущего пункта выполняются и $S(x)$ не зависит от x. Применив формулу (1) для вычисления объема наклонной призмы $\bar{F}$, получаем:

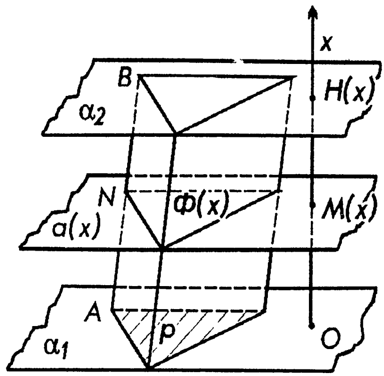


РИС. 75

$$V(\bar{F}) = \int_0^h S(x)dx = S(P)h. \blacksquare \qquad (2)$$

Отметим, что объем наклонной призмы можно вычислить и без помощи определенного интеграла, используя следующее утверждение: *наклонная призма равновелика прямой призме, основанием которой служит перпендикулярное сечение наклонной призмы, а высотой — ее боковое ребро*. Доказательство этого утверждения, а также доказательство теоремы 1 без помощи определенного интеграла читатель найдет в книге [1], п. 423—427 или в книге [12], п. 369—373.

3. Объемы парамиды и усеченной пирамиды

Теорема 2. *Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.*

□ Рассмотрим пирамиду $\bar{F}$ с основанием P и высотой h и докажем, что $V(\bar{F}) = \frac{1}{3}S(P)h$.

Плоскость α_1 основания пирамиды $\bar{F}$ и плоскость α_2, проходящая через вершину пирамиды и параллельная плоскости α_1, являются опорными плоскостями этой пирамиды и расстояние между ними равно h. Введем координатную ось Ox перпендикулярно к плоскости α_1 так, чтобы точка O лежала в плоскости α_1, а вершина H пирамиды лежала на этой оси и имела координату h. Обозначим через $\alpha(x)$ плоскость, перпен-

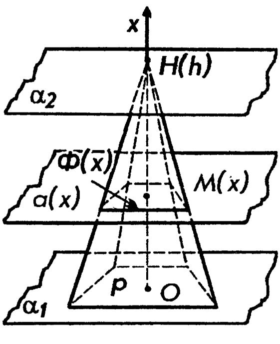


РИС. 76

дикулярную к оси Ox и пересекающую ее в точке $M(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant h$ (рис. 76). Пусть $\Phi(x)$ — фигура, образованная пересечением пирамиды $\bar{F}$ с плоскостью $\alpha(x)$, а $S(x)$ — площадь этой фигуры. Так как $\Phi(x)$ при $0 < x < h$ является образом многоугольника P при гомотетии с центром H, при которой точка O переходит в точку $M(x)$, то $\Phi(x)$ и P подобны, поэтому являются одноименными многоугольниками, т. е. условие 1 пункта 1 выполнено. Известно, что при гомотетии с коэффициентом k отношение площадей многоугольника и его образа равно k^2, поэтому $\frac{S(P)}{S(x)} = \frac{h^2}{[HM(x)]^2} = \frac{h^2}{(h-x)^2}$; $S(x) = \frac{S(P)}{h^2}(h-x)^2$. Эта формула, очевидно, верна и в том случае, когда $x = h$. Мы видим, что выполняется и условие 2 пункта 1. Применив формулу (1) для вычисления объема пирамиды $\bar{F}$, получаем:

$$V(\bar{F}) = \int_0^h S(P)\,\frac{(h-x)^2}{h^2}dx = \frac{S(P)}{h^2}\int_0^h (h-x)^2dx =$$
$$= -\frac{S(P)}{h^2}\,\frac{(h-x)^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}S(P)h\ . \blacksquare$$

Теорема 3. *Объем усеченной пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S_1 и S_2, вычисляется по формуле:*

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}). \qquad (3)$$

□ Обозначим через $\bar{F}$ данную усеченную пирамиду с основаниями P_1 и P_2, площади которых соответственно равны S_1 и S_2 ($S_1 > S_2$). Пусть $\bar{F}$ получена сечением пирамиды $\bar{F}_0$ с вершиной H и основанием P_1 плоскостью многоугольника P_2. Тогда, очевидно, $\bar{F}_0 = \bar{F} + \bar{F}'$ где $\bar{F}'$ — пирамида с вершиной H и основанием P_2. По свойству V_2 измерения объемов

$V(\bar{F}_0) = V(\bar{F}) + V(\bar{F}')$. По теореме 2 $V(\bar{F}_0) = \frac{1}{3}S_1(h + h')$, $V(\bar{F}') = \frac{1}{3}S_2h'$, где h' — высота пирамиды $\bar{F}'$. Таким образом,

$$V(\bar{F}) = \frac{1}{3}S_1(h + h') - \frac{1}{3}S_2h'. \qquad (4)$$

Выразим h' через S_1, S_2 и h. Так как многоугольники P_2 и P_1 гомотетичны с центром H и коэффициентом $k = \frac{h'}{h + h'}$, то $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{h'}{h + h'}\right)^2$. Откуда находим: $h' = \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$. Подставив это значение в формулу (4), после несложных преобразований получаем формулу (3). ■

§ 41. ОБЪЕМЫ КОНУСА, УСЕЧЕННОГО КОНУСА, ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

1. Объемы конуса и усеченного конуса

Теорема 1. *Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.*

□ Рассмотрим конус $\bar{F}$ с основанием P и высотой h и докажем, что $V(\bar{F}) = \frac{1}{3}S(P)h$.

Плоскость α_1 основания конуса и плоскость α_2, проходящая через вершину H конуса и параллельная плоскости α_1, являются его опорными плоскостями и расстояние между ними равно h. Введем координатную ось Ox так, чтобы точка O лежала в плоскости α_1, а вершина H конуса принадлежала этой оси и имела координату h. Обозначим через $\Phi(x)$ фигуру, которая получается при пересечении конуса плоскостью $\alpha(x)$, перпендикулярной к оси Ox и пересекающей эту ось в точке $M(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant h$ (рис. 77). Так как $P(x)$ при $x \neq h$ является образом круга P при гомотетии с центром H и коэффициентом $k = \frac{h - x}{h}$, то $\Phi(x)$ — круг радиуса kr, где r — радиус круга P. Следовательно, площадь $S(x)$ этого круга равна $S(P)\left(\frac{h - x}{h}\right)^2$. При $x = h$ $\Phi(x)$ — точка, поэтому форму-

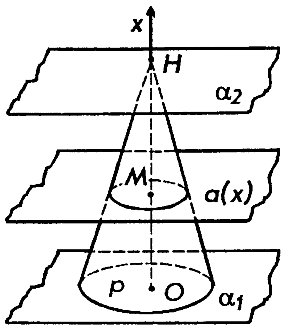


рис. 77

ла $S(x) = S(P)\left(\frac{h-x}{h}\right)^2$ верна при любом x, $0 \leqslant x \leqslant h$. Мы видим, что выполняются условия 1 и 2 п. 1 § 40, следовательно,

$$V = \int_0^h S(P)\,\frac{(h-x)^2}{h^2}dx = \frac{S(P)}{h^2}\int_0^h (h-x)^2dx =$$

$$= -\frac{S(P)}{h^2}\,\frac{(h-x)^3}{3}\,\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}S(P)h. \blacksquare$$

Теорема 2. *Объем усеченного конуса, высота которого равна h, а площади оснований равны S_1 и S_2, равен $\frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$.*

Доказательство этой теоремы по существу ничем не отличается от доказательства теоремы 3 § 40, поэтому мы его опускаем.

2. Объем шара

Теорема 3. *Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.*

□ Пусть OH — какой-нибудь диаметр данного шара, а α_1 и α_2 — касательные плоскости в точках O и H. Эти плоскости являются параллельными опорными плоскостями данного шара, и расстояние между ними равно $OH = 2R$.

Введем координатную ось Ox так, чтобы точка H принадлежала этой оси и имела координату $2R$. Обозначим через $\alpha(x)$ плоскость, перпендикулярную к оси Ox и пересекающую ее в точке $M(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant 2R$.

Сечением шара плоскостью $\alpha(x)$ при $0 < x < 2R$ согласно теореме 2 § 36 является круг, радиус которого обозначим через $r(x)$, а его площадь через $S(x)$. Для того чтобы выразить $r(x)$ через R и x, рассмотрим какое-нибудь сечение шара плоскостью, проходящей через ось Ox, и обозначим через K одну из точек пересечения границы этого сечения с плоскостью $\alpha(x)$ (рис. 78а). Так как $OM(x) = x$, $HM(x) = 2R - x$, $KM(x) = r(x)$, то $(r(x))^2 = (2R - x)x$, поэтому $S(x) = \pi(2R - x)x$. Заметим, что эта формула верна при любом x, $0 \leqslant x \leqslant 2R$. Мы видим, что условия 1 и 2 п. 1 § 40 выполнены. Применив формулу (1) § 40 для вычисления объема V данного шара, получаем:

$$V = \int_0^{2R} \pi(2R - x)x\,dx = \int_0^{2R} 2\pi Rx\,dx - \int_0^{2R} \pi x^2\,dx =$$

$$= 2\pi R \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{2R} - \pi \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2R} = 2\pi R\,\frac{4R^2}{2} - \pi\,\frac{8R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \blacksquare$$

3. Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора

Теорема 4. *Объем V шарового сегмента шара радиуса R вычисляется по формулам:*

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2),$$

где h — высота сегмента, а r — радиус основания.

□ Выведем сначала первую формулу. Пусть α_1 — плоскость основания шарового сегмента, O — центр основания, а α_2 — касательная плоскость к шаровому

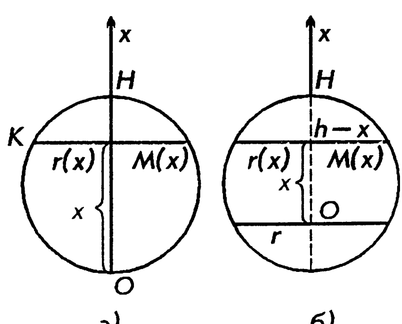


РИС. 78

сегменту в точке H, параллельная плоскости α_1. Тогда $OH = h$. По аналогии с доказательством теоремы 3 введем координатную ось Ox и обозначим через $\alpha(x)$ плоскость, перпендикулярную к оси Ox и пересекающую ее в точке $M(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant h$. Сечением шарового сегмента плоскостью $\alpha(x)$ при $0 \leqslant x < h$ является круг, радиус которого обозначим через $r(x)$, а его площадь — через $S(x)$. Рассматривая какое-нибудь сечение шарового сегмента плоскостью, проходящей через ось Ox, по аналогии с доказательством теоремы 3 получаем (рис. 78б): $r^2(x) = (h - x)\,[2R - (h - x)]$. Поэтому площадь $S(x)$ сечения вычисляется по формуле:

$$S(x) = \pi r^2(x) = \pi(h - x)\,[2R - (h - x)].$$

Очевидно, эта формула верна при любом x, $0 \leqslant x \leqslant h$. По формуле (1) § 40 получаем:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h). \qquad (1)$$

Для вывода другой формулы заметим, что r, h и R связаны равенством

$$r^2 = (2R - h)h. \qquad (2)$$

Выразив отсюда R через r и h и подставив в формулу (1), получаем искомый результат. ■

Следствие 1. *Объем шарового сектора шара радиуса R, образованного объединением шарового сегмента высотой h и конуса, равен $\frac{2}{3}\pi R^2 h$.*

□ Пусть данный шаровой сектор $\bar{F}_0$ образован объединением шарового сегмента $\bar{F}$ и конуса $\bar{F}'$ (см. рис. 64 с. 206). Тогда, очевидно, $\bar{F}_0 = \bar{F} + \bar{F}'$ и по основному свойству V_2 (§ 38)

$$V(\bar{F}_0) = V(\bar{F}) + V(\bar{F}'). \qquad (3)$$

По доказанной теореме $V(\bar{F}) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$. Высота конуса $\bar{F}'$ равна $R - h$, а площадь основания, с учетом формулы (2), равна $\pi(2R - h)h$, поэтому $V(\bar{F}') = \frac{1}{3}\pi(2R - h)h(R - h)$. Подставив эти значения в формулу (3), после элементарных преобразований получаем искомый результат. ■

Предлагаем читателю аналогично обосновать следующее утверждение:

Следствие 2. *Объем шарового слоя* (см. рис. 63б с. 205) *высотой h и радиусами оснований r_1 и r_2 равен*

$$\frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

§ 42. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

1. Понятие поверхности

В этом параграфе мы введем понятие площади поверхности и выведем формулы для вычисления площадей простейших поверхностей по элементам, их определяющим.

Поверхностью мы называем границу любого тела или часть границы тела, причем поверхность называем *замкнутой*, если она является границей всего тела, и *выпуклой*, если является границей или частью границы выпуклого тела. Примерами выпуклых замкнутых поверхностей являются сфера, полная поверхность цилиндра или конуса. Полная поверхность пирамиды, изображенной на рис. 38в с. 146, является замкнутой, но не выпуклой.

В элементарной геометрии ограничиваются весьма узким классом поверхностей, для которых вводится понятие площади. Эти поверхности мы называем простейшими[1] и их множество обозначим через W_0. Элементами множества W_0 являются поверхности круглых тел (шара, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шарового сектора, шарового сегмента, шарового слоя), а также части этих поверхностей, рассмотренные нами выше, т. е. боковые поверхности цилиндра, усеченного конуса, шарового сегмента, а также шарового пояса.

Множеству W_0 принадлежит также любая многогранная фигура, т. е. граница произвольного простого многогранника (замкнутая многогранная фигура) и любая фигура F, полученная из замкнутой много-

---

[1] Поверхности, для которых можно ввести понятие площади, называются *квадрируемыми* (см. [20], с. 354—361). Рассматриваемые нами поверхности являются частными случаями квадрируемых поверхностей.

гранной фигуры отделением нескольких граней, причем, если F имеет более чем одну грань, то любые две грани из F можно соединить цепочкой, целиком состоящей из многоугольников фигуры F. Примерами многогранных фигур являются полная и боковая поверхности призмы или пирамиды, а также полная и боковая поверхности усеченной пирамиды. Многоугольник также является многогранной фигурой.

Множеству W_0 не принадлежат другие поверхности, кроме тех, которые указаны выше. Для простоты изложения без особых оговорок простейшие поверхности будем называть просто поверхностями.

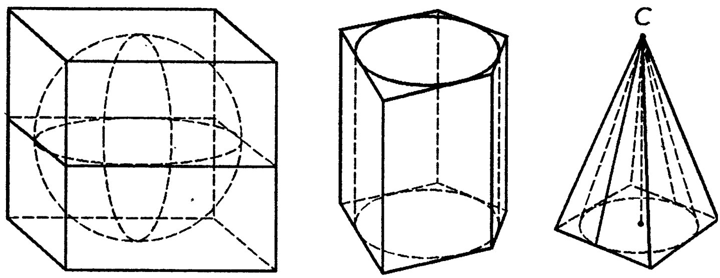
2. Многогранная фигура, описанная около поверхности

Для определения площади поверхности или части поверхности круглого тела необходимо ввести понятие многогранной фигуры, описанной около такой поверхности.

Условимся многоугольник P называть *опорным многоугольником* поверхности F, если P имеет хотя бы одну общую точку с поверхностью F и его плоскость α является опорной плоскостью тела, границей или частью границы которого является поверхность F. При этом, если α не является касательной плоскостью поверхности F, то предполагаем, что имеется хотя бы один круг, все точки которого принадлежат как многоугольнику P, так и поверхности F.

Будем говорить, что многогранная фигура Φ *описана около замкнутой поверхности* F, если Φ — замкнутая многогранная фигура и все ее грани являются опорными многоугольниками поверхности F. В случае, когда F — часть замкнутой поверхности F', то Φ получена из замкнутой многогранной фигуры Φ', описанной около F', отделением тех и только тех граней, которые не являются опорными многоугольниками поверхности F.

На рис. 79а изображена многогранная фигура — поверхность куба, описанная около сферы. На рис. 79б изображена правильная призма, описанная около цилиндра (см. п. 3 § 39). Полная поверхность этой призмы является многогранной фигурой, описанной около полной поверхности цилиндра, а боковая поверхность призмы — многогранной фигурой,



а) б) в)

РИС. 79

описанной около боковой поверхности цилиндра. Аналогично, на рис. 79в изображена правильная пирамида, описанная около конуса с вершиной C, т. е. пирамида с вершиной C, основанием которой служит правильный многоугольник, описанный около основания конуса. Полная поверхность этой пирамиды является многогранной фигурой, описанной около полной поверхности конуса, а боковая поверхность пирамиды — многогранной фигурой, описанной около боковой поверхности конуса.

Таким образом, если F — полная поверхность или боковая поверхность цилиндра или конуса, то существует бесконечное множество многогранных фигур, описанных около поверхности F, причем в этом множестве всегда найдется многогранная фигура, число граней которой больше любого наперед заданного положительного числа. Ниже будет показано, что это утверждение верно и в том случае, когда F — сфера или часть сферы.

3. Площадь поверхности

Площадью многогранной фигуры естественно считать сумму площадей всех ее граней. Значительно сложнее определить площадь искривленной поверхности, т. е. поверхности или части поверхности круглого тела. Для определения площади такой поверхности воспользуемся многогранными фигурами, описанными около поверхности.

Пусть F — данная поверхность. Предположим, что существует хотя бы одна бесконечная последовательность многогранных фигур

$$\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^n, \dots, \tag{1}$$

каждая из которых является описанной около поверхности F и при $n \to \infty$ число граней этих фигур неограниченно возрастает и все их точки становятся сколь угодно близкими к поверхности F. Тогда если существует предел последовательности площадей многогранных фигур (1):

$$S(\Phi^1), S(\Phi^2), \dots, S(\Phi^n), \dots, \tag{2}$$

и если этот предел не зависит от выбора последовательности (1), удовлетворяющей указанным выше условиям, то этот предел называем *площадью поверхности F* и обозначаем через $S(F)$.

Имеет место следующая важная теорема, которую приводим без доказательства.

Теорема. *Если введено измерение площадей многоугольников, то каждая простейшая поверхность имеет площадь, причем равные поверхности имеют равные площади, и если замкнутая поверхность F разложена на поверхности*[1] *F_1 и F_2, то*

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2).$$

Таким образом, все известные нам поверхности — сферическая поверхность, боковая и полная поверхности цилиндра, конуса или усеченного конуса, боковая и полная поверхности шарового сегмента, шаровой пояс, поверхность шарового сектора имеют площади. Из этой теоремы и определения площади поверхности следует важный вывод, которым мы будем неоднократно пользоваться: при выводе формулы для вычисления площади $S(F)$ поверхности F по элементам, определяющим эту поверхность, достаточно рассмотреть какую-нибудь бесконечную последовательность (1) описанных около поверхности F многогранных фигур, удовлетворяющих указанным выше условиям. Тогда предел последовательности (2) равен $S(F)$.

---

[1] Говорят, что поверхность F разложена на поверхности F_1 и F_2, если существует замкнутая простая линия γ поверхности F такая, что $F_1 \cap F_2 = \gamma$, а $F_1 \cup F_2 = F$.

Замечание. Можно было попытаться определить площадь поверхности по аналогии с длиной дуги. Напомним, что длина дуги определяется как предел последовательности длин ломаных, вписанных в эту дугу, при условии, что длины всех звеньев ломаных стремятся к нулю. Казалось бы, что площадь поверхности можно было бы определить аналогично, т. е. как предел последовательности площадей многогранных фигур, вписанных в поверхность, при условии, что наибольшее расстояние между двумя точками каждой грани стремится к нулю. В конце прошлого столетия, однако, была обнаружена непригодность этого определения. Даже в такую простую поверхность, как поверхность цилиндра, многогранную фигуру можно вписать так, что указанного предела либо не существует, либо в пределе получится сколь угодно большое число (см. [2], с. 304—306).

§ 43. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЦИЛИНДРА, КОНУСА И УСЕЧЕННОГО КОНУСА

1. Площадь поверхности цилиндра

Теорема 1. *Площадь боковой поверхности цилиндра с высотой h радиуса r равна $2\pi rh$.*

□ Пусть $\bar{F}$ — данный цилиндр, а F — его боковая поверхность. Докажем, что $S(F) = 2\pi rh$.

Обозначим через $\bar{\Phi}_n$ правильную n-угольную призму, описанную около цилиндра $\bar{F}$. Выше было отмечено, что боковая поверхность Φ_n этой призмы, имеющая n граней, при любом $n \geqslant 3$ является многогранной фигурой, описанной около поверхности F. Рассмотрим бесконечную последовательность многогранных фигур:

$$\Phi_3,\ \Phi_4,\ \dots,\ \Phi_n,\ \dots, \tag{1}$$

При $n \to \infty$ число граней этих фигур неограниченно возрастает, и все их точки становятся сколь угодно близкими к поверхности F. Поэтому, если S_3, S_4, ..., S_n, ... — последовательность площадей многогранных фигур (1), то $S(F) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Последовательность P_3, P_4, ..., P_n, ... периметров оснований $\bar{P}_n$ призм $\bar{\Phi}_n$, $n = 3, 4, \dots$ сходится[1] и имеет предел, равный длине окружности основания цилиндра: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 2\pi r$. Следовательно, $S(F) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (P_n h) = (\lim\limits_{n\to\infty} P_n)h = 2\pi rh$. ■

Площадь полной поверхности цилиндра согласно теореме § 42 равна сумме площадей боковой поверхности и двух оснований, поэтому справедливо утверждение:

Следствие. *Площадь полной поверхности цилиндра с высотой h радиуса r равна* $2\pi r(h + r)$.

Отметим, что в некоторых школьных курсах стереометрии (см., например, [8], п. 54) из наглядных соображений за площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь развертки, т. е. площадь прямоугольника, который получается, если разрезать боковую поверхность цилиндра по некоторой образующей и развернуть ее на плоскость. Ясно, что высота развертки равна образующей, а основание — длине окружности основания цилиндра. Поэтому боковая поверхность цилиндра вычисляется по формуле, совпадающей с формулой, приведенной в предыдущей теореме.

2. Площадь поверхности конуса

Теорема 2. *Площадь боковой поверхности конуса с образующей l и радиусом основания r равна πrl.*

□ Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы. Обозначим через $\bar{\Phi}_n$ правильную n-угольную пирамиду, описанную около конуса $\bar{F}$. Боковая поверхность Φ_n этой пирамиды, имеющая n граней, при любом $n \geqslant 3$ является многогранной фигурой, описанной около поверхности F. Рассмотрим бесконечную последовательность многогранных фигур:

$$\Phi_3, \Phi_4, \dots, \Phi_n, \dots, \tag{2}$$

При $n \to \infty$ число граней этих фигур неограниченно

---

[1] В § 53 [7] было доказано, что последовательность периметров правильных вписанных в окружность многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон сходится к длине окружности. Можно показать, что последовательность периметров правильных описанных около окружности многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон также сходится к длине окружности.

возрастает и все их точки становятся сколь угодно близкими к поверхности F. Поэтому если S_3, S_4, ... , S_n, ... — последовательность площадей многогранных фигур (2), то $S(F) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Как уже отмечалось, последовательность P_3, P_4, ... , P_n, ... периметров оснований пирамид $\bar{\Phi}_n$, $n = 3, 4, \ldots$ сходится и имеет предел, равный длине окружности основания конуса: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 2\pi r$. Легко видеть, что апофема пирамиды $\bar{\Phi}_{n+1}$ при любом n равна l, поэтому площадь S_n многогранной фигуры Φ_n равна $\frac{1}{2}P_n l$ (см. п. 2 § 30). Следовательно, $S(F) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2}P_n l) = (\lim\limits_{n\to\infty} P_n)\frac{1}{2}l = \pi rl$. ■

Площадь полной поверхности конуса согласно теореме § 42 равна сумме площадей боковой поверхности и основания, поэтому справедливо утверждение:

Следствие. *Площадь полной поверхности конуса с образующей l и радиусом основания r равна $\pi r(r + l)$.*

В некоторых школьных учебниках (см., например, [8], п. 56) из наглядных соображений за площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки, т. е. площадь кругового сектора, который получается, если разрезать боковую поверхность конуса по некоторой образующей и развернуть ее на плоскость (рис. 80). Радиус развертки равен образующей конуса, а длина дуги длине окружности основа-

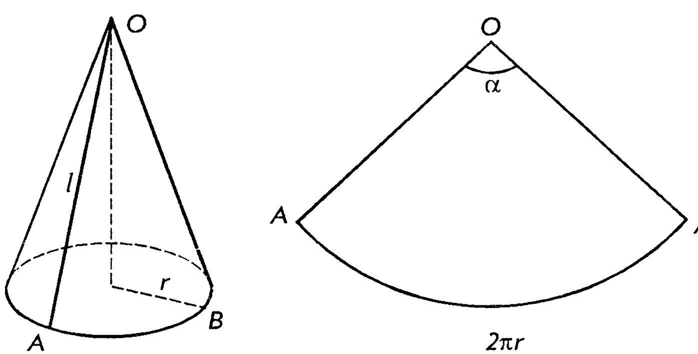


РИС. 80

ния. Поэтому согласно формуле (5) § 54 [7] площадь S развертки вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2}l(2\pi r) = \pi rl$, совпадающей с той, которая приведена в предыдущей теореме.

3. Площадь поверхности усеченного конуса

Теорема 3. *Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна $\pi(R + r)l$, где l — образующая, а R и r — радиусы оснований.*

□ Рассмотрим усеченный конус с основаниями $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$, центры которых обозначим через O и O'. Пусть C — вершина конуса, из которого получен усеченный конус, AA' — одна из образующих усеченного конуса. Из теоремы предыдущего параграфа следует, что площадь S боковой поверхности данного усеченного конуса равна разности площадей боковых поверхностей конусов с общей вершиной C и основаниями $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ соответственно. Применяя теорему 2, получаем: $S = \pi R \cdot CA - \pi r \cdot CA' = \pi R(CA' + A'A) - \pi r \cdot CA'$. Отсюда, учитывая, что $A'A = l$, находим:

$$S = \pi Rl + \pi(R - r)CA'. \qquad (3)$$

Из подобия треугольников $CO'A'$ и COA получим: $\frac{CA'}{CA} = \frac{r}{R}$ или $\frac{CA'}{CA' + l} = \frac{r}{R}$. Следовательно, $CA' = \frac{lr}{R - r}$. Подставив это выражение в формулу (3), получаем искомый результат. ■

Площадь полной поверхности усеченного конуса согласно теореме § 42 равна сумме площадей боковой поверхности и двух оснований. Поэтому справедливо утверждение:

Следствие. *Площадь полной поверхности усеченного конуса с образующей l и радиусами R и r оснований равна $\pi(Rl + rl + R^2 + r^2)$.*

§ 44. ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ И ЕЕ ЧАСТЕЙ

1. Площадь сферы

Теорема 1. *Площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.*

□ Рассмотрим сферу F радиуса R с центром O и докажем, что ее площадь S вычисляется по формуле: $S = 4\pi R^2$.

Построим бесконечную последовательность замкнутых многогранных фигур

$$\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^m, \dots, \qquad (1)$$

каждая из которых описана около сферы F, и при $m \to \infty$ число граней этих поверхностей неограниченно возрастает и все их точки становятся сколь угодно близкими к сфере F. Для этого рассмотрим куб $\bar{\Phi}^1$, поверхность Φ^1 которого описана около данной сферы (см. рис. 79а с. 241), и соединим отрезками вершины куба с центром O сферы. Через точки пересечения сферы с этими отрезками проведем к сфере касательные плоскости, которые отсекают от куба $\bar{\Phi}_1$ выпуклый многогранник $\bar{\Phi}^2$, поверхность Φ^2 которого описана около сферы. Соединим теперь отрезками вершины многогранника $\bar{\Phi}^2$ с точкой O и через точки пересечения сферы с этими отрезками проведем к сфере касательные плоскости. Так как $\bar{\Phi}^2$ — выпуклый многогранник, то согласно лемме § 38 эти плоскости отсекают от многогранника $\bar{\Phi}^2$ выпуклый многогранник $\bar{\Phi}^3$, поверхность Φ^3 которого является описанной около сферы. Продолжая указанный процесс, мы получим бесконечную последовательность замкнутых выпуклых многогранных поверхностей (1), удовлетворяющих указанным выше условиям.

Пусть Φ^m — одна из поверхностей системы (1), а $\bar{\Phi}^m$ — многогранник с границей Φ^m, имеющей n граней. Занумеруем грани этого многогранника в произвольном порядке и обозначим через S_i площадь i-й грани ($i = 1, 2, \dots, n$). Соединяя отрезками точку O со всеми вершинами многогранника $\bar{\Phi}^m$, получим n пирамид с общей вершиной O, основаниями которых являются грани многогранника $\bar{\Phi}^m$, а высотами — радиусы сферы, проведенные к точкам касания граней многогранника со сферой (рис. 81). Следовательно, объем i-й пирамиды равен $\frac{1}{3}S_iR$.

Так как O — точка, лежащая внутри выпуклого многогранника $\bar{\Phi}^m$, то согласно лемме § 38 этот многогранник разложен на n указанных выше пирамид, поэтому по следствию 1 теоремы § 38

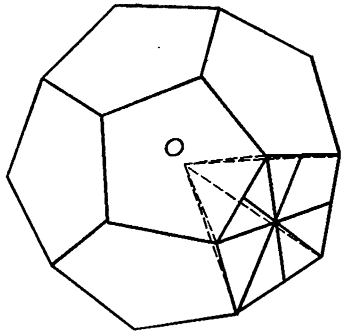


Рис. 81

$$V(\bar{\Phi}^m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} S_i R = \frac{1}{3} R \sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{3} R S(\Phi^m),$$

где $S(\Phi^m) = \sum_{n=1}^{m} S_i$ — площадь поверхности Φ^m. Таким образом, $S(\Phi^m) = \frac{3}{R} V(\bar{\Phi}^m)$, поэтому площадь S сферы есть предел последовательности (см. (2) § 42):

$$\frac{3}{R} V(\bar{\Phi}^1), \frac{3}{R} V(\bar{\Phi}^2), \ldots, \frac{3}{R} V(\bar{\Phi}^m), \ldots . \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что предел последовательности

$$V(\bar{\Phi}^1), V(\bar{\Phi}^2), \ldots, V(\bar{\Phi}^m), \ldots \qquad (3)$$

равен объему V шара $\bar{F}$ с границей F. В самом деле, при увеличении m точки многогранной поверхности Φ^m становятся сколь угодно близкими к сфере F, поэтому многогранник $\bar{\Phi}^m$, начиная с какого-то номера m, содержится в шаре $\bar{F}_\sigma$ радиуса $R + \sigma$ с центром O. С другой стороны, так как Φ^m — поверхность, описанная около сферы F, то многогранник $\bar{\Phi}^m$ содержит шар $\bar{F}$. Согласно следствию 2 теоремы § 38 $V(\bar{F}) < V(\bar{\Phi}^m) < V(\bar{F}_\sigma)$ или $\frac{4}{3}\pi R^3 < V(\bar{\Phi}^m) < \frac{4}{3}\pi(R + \sigma)^3$.

Отсюда, учитывая, что σ — сколь угодно малое положительное число, мы заключаем, что предел последовательности (3) равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, поэтому предел последовательности (2) равен $4\pi R^2$. ■

2. Площадь боковой поверхности шарового сегмента

Лемма. *Площадь сферической поверхности шарового сектора $\bar{F}_0$ шара радиуса R равна $\frac{3}{R}V(\bar{F}_0)$.*

□ Пусть шаровой сектор $\bar{F}_0$ шара с центром O образован объединением шарового сегмента $\bar{F}$ с основанием $\bar{\omega}$ и высотой AH этого шара и конуса $\bar{F}'$ с тем же основанием и с вершиной в центре O. Обозначим через F сферическую поверхность сектора $\bar{F}_0$ (т. е. боковую поверхность сегмента $\bar{F}$) и докажем, что $S = S(F) = \frac{3}{R}V(\bar{F}_0)$.

Рассмотрим правильный многоугольник $A_1A_2 \dots A_s$, описанный около круга $\bar{\omega}$, и высоту AH сегмента $\bar{F}$, где $H \in \bar{\omega}$. Через прямые A_1A_2, A_2A_3, ... , $A_{s-1}A_s$, A_sA_1, а также через точку A проведем $s + 1$ плоскость, каждая из которых является касательной к поверхности F. Все эти плоскости и плоскость круга $\bar{\omega}$, пересекаясь, образуют замкнутую выпуклую многогранную фигуру, описанную около тела $\bar{F}$, причем если от этой фигуры отделить многоугольник $A_1A_2 \dots A_s$, то получим многогранную фигуру с границей $A_1A_2 \dots A_s$, описанную около поверхности F (рис. 82). Увеличивая число s и проводя новые касательные плоскости к поверхности F (см. доказательство предыдущей теоремы), можно построить бесконечную последовательность многогранных фигур

$$\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^m, \dots, \qquad (1)$$

каждая из которых описана около поверхности F, и при $m \to \infty$ число граней этих фигур неограниченно

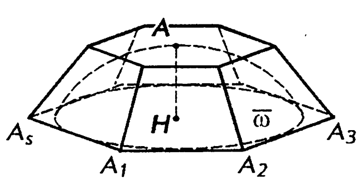


РИС. 82

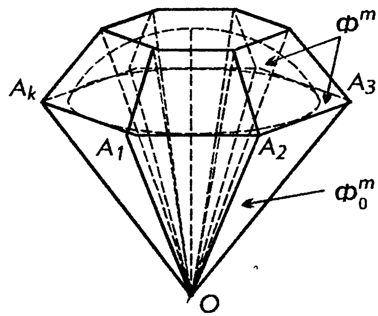


Рис. 83

возрастает и все их точки становятся сколь угодно близкими к поверхности F.

Пусть Φ^m — одна из многогранных фигур последовательности (1), имеющая n граней, а $A_1A_2 \dots A_k$ — граница этой фигуры. Рассмотрим многогранник $\bar{\Phi}_0^m$, ограниченный фигурой Φ^m и боковой поверхностью правильной пирамиды $OA_1A_2 \dots A_k$. Соединяя отрезками точку O со всеми вершинами поверхности Φ^m, получим n пирамид, на которые разлагается многогранник $\bar{\Phi}_0^m$ (рис. 83). Аналогично доказательству предыдущей теоремы получаем формулу: $S(\Phi^m) = \frac{3}{R}V(\bar{\Phi}_0^m)$, где $S(\Phi^m)$ — площадь многогранной фигуры Φ^m. По определению $S(F)$ есть предел последовательности $S(\Phi^1), S(\Phi^2), \dots, S(\Phi^m), \dots$, т. е. предел последовательности $\frac{3}{R}V(\bar{\Phi}_0^1), \frac{3}{R}V(\bar{\Phi}_0^2), \dots$. Так как предел последовательности $V(\bar{\Phi}_0^1), V(\bar{\Phi}_0^2), \dots$ равен $V(\bar{F}_0)$, то $S(F) = \frac{3}{R}V(\bar{F}_0)$. ■

Теорема 2. *Площадь S боковой поверхности шарового сегмента шара радиуса R вычисляется по формулам:*

$$S = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2),$$

где h — высота сегмента, а r — радиус основания.

□ Пусть $\bar{F}$ — данный шаровой сегмент шара $\bar{G}$ с центром O радиуса R, F — боковая поверхность сегмента, а $\bar{\omega}$ — его основание. Докажем сначала, что $S = S(F) = 2\pi Rh$.

Рассмотрим другой шаровой сегмент $\bar{F}'$ с тем же основанием $\bar{\omega}$ шара $\bar{G}$ и обозначим через F' боковую поверхность этого сегмента. Так как поверхность G шара $\bar{G}$ разложена на поверхности F и F', то согласно теореме § 42 $S(G) = S(F) + S(F')$ или

$$S(F) + S(F') = 4\pi R^2. \qquad (2)$$

Возможны три случая, каждый из которых рассмотрим отдельно: $h < R$, $h = R$, $h > R$.

а) $h < R$. В этом случае точка O не принадлежит сегменту $\bar{F}$. Пусть $\bar{F}_1$ — конус с основанием $\bar{\omega}$ и вершиной O, а $\bar{F}_0 = \bar{F} + \bar{F}_1$ — шаровой сектор. По предыдущей лемме $S(F) = \frac{3}{R}V(\bar{F}_0)$. Согласно следствию 1 теоремы 4 § 41 $V(\bar{F}_0) = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, поэтому $S(F) = \frac{3}{R}(\frac{2}{3}\pi R^2 h) = 2\pi Rh$.

б) $h = R$. В этом случае $O \in \bar{\omega}$, т. е. O — центр круга $\bar{\omega}$. При центральной симметрии с центром O каждая из поверхностей F и F' переходит в другую поверхность, поэтому $F = F'$. По теореме § 42 $S(F) = S(F')$, следовательно, по формуле (2) получаем: $2S(F) = 4\pi R^2$ или $S = S(F) = 2\pi R^2 = 2\pi Rh$.

в) $h > R$. Так как $h + h' = 2R$, где h' — высота сегмента $\bar{F}'$, то $h' < R$ и по доказанному (случай а)) $S(F') = 2\pi Rh'$. По формуле (2) получаем: $S = S(F) = 4\pi R^2 - 2\pi R(2R - h) = 2\pi Rh$.

Для вывода другой формулы воспользуемся равенством (2) § 41: $r^2 = (2R - h)h$. Выразив отсюда R через r и h и подставив в формулу $S = 2\pi Rh$, получаем искомый результат. ■

Следствие 1. *Площадь поверхности шарового сектора шара радиуса R, образованного объединением конуса и шарового сегмента высотой h и радиусом основания r, равна $\pi R(2h + r)$.*

□ Пусть данный шаровой сектор $\bar{F}_0$ образован объединением конуса $\bar{F}'$ и шарового сегмента $\bar{F}$. По теореме § 42 $S(F_0) = S(F) + S(F')$, где F_0 — поверхность тела $\bar{F}_0$, а F и F' боковые поверхности сегмента $\bar{F}$ и конуса $\bar{F}'$. По доказанной теореме $S(F) =$

$= 2\pi Rh$, а по теореме 2 § 43 $S(F') = \pi rR$, поэтому $S(F_0) = \pi R(2h + r)$. ■

Предлагаем читателю аналогично обосновать следующее утверждение.

Следствие 2. *Площадь полной поверхности шарового слоя высотой h и радиусами оснований r_1 и r_2 равна $\pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2)$, а площадь шарового пояса этого слоя равна $2\pi Rh$.*

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VIII

ОБЪЕМ ТЕЛА

405. Ребро прямоугольного параллелепипеда $\bar{F}$ разделено на n равных частей $(n - 1)$ плоскостями, перпендикулярными к этому ребру. Доказать, что данные плоскости разлагают параллелепипед $\bar{F}$ на n равных друг другу прямоугольных параллелепипедов, объем каждого из которых равен $\frac{1}{n}V$, где V — объем данного параллелепипеда.

406. При подобии с коэффициентом k образом обобщенного цилиндра (обобщенного конуса) $\bar{F}$ является обобщенный цилиндр (обобщенный конус) $\bar{F}'$ (см. задачу 277). Доказать, что $V(\bar{F}') = k^3V(\bar{F})$.

407. Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположной грани. Доказать, что, пересекаясь, эти четыре плоскости образуют полную поверхность тетраэдра, и найти отношение объемов полученного и данного тетраэдров.

408. Объем правильной треугольной пирамиды равен $\frac{1}{6}b^3$, где b — длина бокового ребра. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

409. Доказать, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади какой-либо ее боковой грани на расстояние от плоскости этой грани до прямой, содержащей противоположное ребро.

410. Основанием треугольной пирамиды $DABC$ с равными боковыми ребрами служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, площадь которого равна s. Меры двугранных углов $D \cdot AC \cdot B$ и

$D \cdot BC \cdot A$ равны соответственно α и β. Найти объем пирамиды.

411. Клином называется выпуклый пятигранник, основание которого — прямоугольник, две противоположные боковые грани — равнобедренные треугольники, а две другие боковые грани — равнобедренные трапеции. Расстояние от вершин, не принадлежащих основанию, до плоскости основания называется высотой клина. Доказать, что объем V клина вычисляется по формуле: $V = \frac{1}{6}(2a + c)bh$, где a и b — стороны основания, c — ребро, противоположное основанию, h — высота клина.

412. Доказать, что объем V четырехугольной усеченной пирамиды с высотой h, основаниями которой являются прямоугольники, вычисляется по формуле: $V = \frac{h}{6}[ab + a_1b_1 + (a + a_1)(b + b_1)]$. Здесь a и a_1 — длины оснований одной пары противоположных боковых граней, а b и b_1 — другой пары противоположных боковых граней усеченной пирамиды.

413. Обелиском называется выпуклый шестигранник, два основания которого — прямоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, а все боковые грани — равнобедренные трапеции, плоскости которых, вообще говоря, не пересекаются в одной точке. Доказать, что объем V обелиска вычисляется по формуле: $V = \frac{h}{6}[ab + a_1b_1 + (a + a_1)(b + b_1)]$, где h — высота обелиска, т. е. расстояние между плоскостями оснований, a и a_1 — длины оснований одной пары противоположных боковых граней, а b и b_1 — другой пары противоположных боковых граней.

414. Найти отношение объемов фигур, на которые разлагает правильную четырехугольную пирамиду плоскость, перпендикулярная к стороне основания и делящая эту сторону в отношении $1 : 3$.

415. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти отношение объемов тетраэдра ACB_1D_1 и данного параллелепипеда.

416. Найти объем правильной n-угольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а боковое ребро равно b.

417. Доказать, что объем тетраэдра равен

$\frac{1}{6}abc\sin\varphi$, где a и b — противоположные ребра, а φ и c — соответственно угол и расстояние между прямыми, содержащими эти ребра.

418. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 см. Найти объем тетраэдра AD_1EF, где E и F — середины ребер DC и BB_1.

419. Доказать, что четырехугольник, вершинами которого являются середины двух пар противоположных ребер тетраэдра, является параллелограммом, и плоскость этого параллелограмма разлагает тетраэдр на два равновеликих многогранника.

420. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, разлагает его на два равновеликих многогранника.

421. Найти объем параллелепипеда, если три его ребра с общей вершиной равны a, b, c, причем два из этих ребер перпендикулярны, а третье ребро образует с каждым из них острый угол α.

422. В треугольной призме два угла основания равны α и β, а радиус окружности, описанной около основания, равен R. Каждое боковое ребро призмы равно a и образует с плоскостью основания угол φ. Найти объем призмы.

423. Через вершину B правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, где $AB = a$, $AA_1 = a\sqrt{3}$, проведена плоскость, перпендикулярная к диагонали AB_1 грани. Доказать, что эта плоскость разлагает данную призму на два многогранника, один из которых является пирамидой, и найти объем этой пирамиды.

424. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны. Через вершину A_1 и середины M и N ребер CC_1 и BC проведена плоскость. Найти отношение объемов многогранников, на которые плоскость A_1MN разлагает призму.

425. В пирамиде $DABC$ все плоские углы при вершине D прямые и $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$. Найти длину ребра куба, у которого три ребра, имеющие общую вершину D, принадлежат лучам DA, DB, DC, а вершина, противоположная D, лежит в плоскости ABC.

426. Доказать, что существует правильная треугольная призма, все вершины которой принадлежат поверхности данного куба, плоскости оснований которой перпендикулярны к одной из диагоналей куба и одна из них делит эту диагональ пополам, а вторая отсекает от нее третью часть. Найти объем призмы, если ребро куба равно a.

427. Доказать, что объем шарового слоя с высотой h и радиусами оснований r_1 и r_2 равен $\frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$.

428. Найти объем шара, поверхность которого вписана в конус с высотой h и радиусом основания r.

429. В конусе, осевым сечением которого является правильный треугольник, расположены два шара так, что поверхность одного шара вписана в конус, а поверхность другого касается боковой поверхности конуса по окружности, а также касается первого шара. Найти отношение объемов этих шаров.

430. Одна из касательных плоскостей к сфере F, вписанной в данный конус, перпендикулярна к образующей и отсекает на этой образующей отрезок, считая от вершины конуса, в k раз больший радиуса вписанной сферы. Найти отношение объема конуса к объему шара с границей F.

431. Плоскость основания данного конуса с высотой h и радиусом основания R совпадает с плоскостью одного из оснований цилиндра радиуса r, где $r < R$. Центр другого основания цилиндра совпадает с вершиной конуса. Найти объем V части конуса, расположенной вне цилиндра, и объем V' части цилиндра, расположенной вне конуса.

432. Отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра, радиус основания которого равен r, является диаметром шара, радиуса R, где $R > r$. Найти объем части цилиндра, расположенной вне шара.

433. Два равных цилиндра, высоты которых больше их диаметров, расположены так, что их оси пересекаются под прямым углом и точка пересечения осей равноудалена от оснований цилиндров. Найти объем общей части этих цилиндров, если радиус каждого из них равен 1 см.

434. В тетраэдр с высотами h_1, h_2, h_3, h_4 вписана сфера радиуса R. Доказать, что $\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$.

435. Вершины одного основания правильной шестиугольной призмы, все стороны которой равны a, принадлежат боковой поверхности конуса, а вершины другого основания — основанию конуса. Найти объем конуса, если угол осевого сечения конуса при его вершине равен 60°.

436. Грани ABD и ACB пирамиды $DABC$ являются прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой AB, лежат в перпендикулярных плоскостях и $AC = BC$. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду, если известно, что $AB = 2$ см, $BD = 1$ см.

437. Доказать, что существует цилиндр, осью которого является прямая, проходящая через середины противоположных ребер правильного тетраэдра, а диаметрами оснований — отрезки, соединяющие центры граней. Найти отношение объемов цилиндра и тетраэдра.

438. В конус вписан куб так, что две вершины куба принадлежат диаметру основания конуса, а остальные шесть вершин — его боковой поверхности. Найти отношение объемов конуса и куба.

439. Около сферы радиуса 1 см описаны правильная четырехугольная пирамида и куб, объем которого равен $\frac{3}{4}$ объема пирамиды. Одна из граней куба принадлежит основанию пирамиды, и ее стороны параллельны сторонам основания пирамиды. Найти объем тела $\overline{F}$, образованного пересечением куба и пирамиды.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

440. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, боковое ребро равно l, плоский угол при вершине равен α, а двугранный угол при боковом ребре равен β. Выразить: а) площадь боковой поверхности пирамиды через h и α; б) полную поверхность пирамиды через l и β.

441. Основание пирамиды, а также одна из ее боковых граней являются правильными треугольниками со стороной a, плоскости которых перпендикулярны. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

442. В пирамиде $SABC$ с основанием ABC $AB = AC =$

$= b$, угол между плоскостями SAB и SAC равен α, и эти плоскости перпендикулярны к плоскости ABC. Угол между плоскостями SBC и ABC также равен α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

443. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше площади основания. Найти угол φ наклона бокового ребра к плоскости основания.

444. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен 120°. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если площадь сечения, проходящего через два противоположных боковых ребра, равна Q.

445. Основанием пирамиды является квадрат со стороной a. Плоскости двух смежных боковых граней пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а угол между каждой из плоскостей двух других боковых граней с плоскостью основания равен α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

446. Основанием пирамиды с высотой h является ромб. Плоскости двух смежных боковых граней пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а мера двугранного угла пирамиды, образованного этими гранями, равна 120°. Угол между каждой из двух других боковых граней и плоскостью основания равен 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

447. В правильной треугольной призме через сторону одного из оснований и противолежащую вершину другого основания проведена плоскость, и угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен 30°. Площадь сечения равна 8 см^2. Найти площадь полной поверхности призмы.

448. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BA_1C} = \beta$. Найти площадь боковой поверхности призмы.

449. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной a. Проекцией вершины A_1 на плоскость ABC является центр треугольника ABC, а угол между прямой AA_1 и плоскостью основания равен 45°. Найти площадь боковой поверхности призмы.

450. Найти площадь боковой поверхности правильной усеченной треугольной пирамиды, у которой ребра оснований равны a и b ($a > b$), а мера двугранного угла, ребро которого содержит сторону длины a, равна φ.

451. Все вершиы правильной шестиугольной призмы лежат на поверхности куба с ребром a. Диагональ куба принадлежит прямой, соединяющей центры оснований призмы, и делится плоскостями ее оснований на три равных отрезка. Найти площадь полной поверхности призмы.

452. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если угол между его образующими и диагональю осевого сечения равен φ, а площадь основания равна Q.

453. Периметр осевого сечения цилиндра равен $2p$. Найти радиус и образующую цилиндра с наибольшей площадью боковой поверхности.

454. Все ребра правильной треугольной призмы равны a. Каждое боковое ребро призмы — отрезок, соединяющий центры оснований одного из трех данных цилиндров радиуса a. Найти площадь полной поверхности тела, являющегося объединением указанных трех цилиндров.

455. Отношение площадей боковой и полной поверхностей конуса равно $\frac{2}{3}$. Найти угол между прямой, содержащей образующую конуса, и плоскостью основания конуса.

456. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен φ. В окружность основания конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна a, а противолежащий угол острый и равен α. Найти площадь полной поверхности конуса.

457. На боковой поверхности конуса, высота которого равна h, можно провести три взаимно перпендикулярные образующие. Найти площадь полной поверхности конуса.

458. Две перпендикулярные образующие конуса, высота которого равна h, делят боковую поверхность конуса на две части, площади которых относятся как $1 : 2$. Найти объем конуса.

459. Найти угол при вершине осевого сечения конуса, если разверткой боковой поверхности конуса является полукруг.

460. Отношение площади боковой поверхности усеченного конуса к площади сечения, проходящего через его высоту, равно 2π. Найти угол между прямой, содержащей образующую, и плоскостью основания усеченного конуса.

461. Радиусы оснований усеченного конуса равны 9 см и 24 см. Из точки пересечения диагоналей сечения, проведенного через высоту усеченного конуса, образующая видна под углом 60°. Найти площадь полной поверхности усеченного конуса.

462. В правильный тетраэдр вписан конус и около этого правильного тетраэдра описан конус так, что окружности оснований конусов вписана и описана около одной из граней тетраэдра, а вершина тетраэдра, противоположная этой грани, совпадает с вершинами конусов. Найти отношение площадей полных поверхностей вписанного и описанного конусов.

463. В конус с радиусом R основания и высотой h вписан цилиндр так, что окружность одного из оснований цилиндра принадлежит боковой поверхности конуса, а окружность другого основания принадлежит плоскости основания конуса. Найти радиус и высоту цилиндра с наибольшей площадью боковой поверхности.

464. Окружности оснований двух конусов вписаны в параллельные грани куба с ребром a, а вершиной каждого конуса является центр противоположной грани. Найти площадь поверхности тела, являющегося пересечением данных конусов.

465. Доказать, что полная поверхность конуса, осевое сечение которого — правильный треугольник, равновелика поверхности шара, диаметр которого равен высоте конуса.

466. Сфера вписана в цилиндр. Найти отношение площади сферы к площади полной поверхности цилиндра.

467. Доказать, что отношение площадей полной поверхности конуса с радиусом r основания и образующей l к площади сферы, вписанной в конус, равно

$\frac{(l+r)^2}{4r(l-r)}$, причем это число равно отношению объема конуса к объему шара, поверхностью которого является вписанная сфера.

468. Площадь полной поверхности конуса в n раз больше площади поверхности вписанной в него сферы. Найти угол между прямой, содержащей образующую конуса, и плоскостью его основания.

469. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса, в который можно вписать сферу, если его образующая равна l.

470. Найти отношение площадей сфер, одна из которых вписана в данный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, другая — в тетраэдр AB_1CD_1.

471. Доказать, что существует сфера, касающаяся всех ребер правильного тетраэдра, центр которой совпадает с центром сферы, вписанной в правильный тетраэдр. Ребро тетраэдра равно a. Найти: а) площадь сферы, касающейся всех ребер правильного тетраэдра; б) площадь той части сферы, касающейся всех ребер тетраэдра, которая расположена вне тетраэдра.

472. Площадь сечения шара плоскостью, не проходящей через центр, равна Q. Угол, под которым из центра шара виден диаметр сечения, равен α. Найти площади сферических поверхностей шаровых сегментов, на которые окружность сечения разлагает поверхность шара.

473. Сфера F радиуса R вписана в конус, причем расстояние от вершины конуса до центра сферы равно a. Найти площади шаровых сегментов шара с поверхностью F, на которые окружность, состоящая из точек касания боковой поверхности конуса и шара, разлагает поверхность шара.

474. Плоскость, не проходящая через центр шара и перпендикулярная к данному диаметру, разлагает поверхность шара так, что площадь сечения равна разности площадей сферических поверхностей получившихся шаровых сегментов. Доказать, что секущая плоскость делит данный диаметр шара на два отрезка, один из которых есть среднее пропорциональное между диаметром и другим отрезком.

475. Отрезок OA — высота шарового сегмента, а B —

точка окружности его основания. Доказать, что площадь сферической поверхности этого сегмента равна площади круга радиуса AB.

476. Дан шаровой слой шара радиуса R высотой h и радиусами оснований r_1 и r_2. Доказать, что площадь шарового пояса этого шарового слоя равен $2\pi Rh$, а площадь полной поверхности слоя равна $\pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2)$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

2. Указание. Доказать методом от противного.

3. Указание. Воспользоваться аксиомой II_5.

4. Указание. Рассмотреть все возможные случаи в зависимости от принадлежности точек C и D полупространствам с общей границей α, содержащим соответственно точки A и B.

8. Указание. Воспользоваться аксиомами II_4 и II_5.

9. Указание. Воспользоваться задачей 8 и аксиомой II_5.

11. Указание. Доказать методом от противного, воспользовавшись аксиомой III_2.

12. Указание. Доказать методом от противного, воспользовавшись задачей 11 и аксиомой III_4.

13. Указание. Воспользоваться идеей доказательств свойств 3^0 и 4^0 § 5 [7].

14. Указание. Воспользоваться задачами 11, 12, 13.

16. Указание. Воспользоваться задачей 13 и аксиомами III_4 и III_5.

17. Указание. Воспользоваться аксиомами III_7, III_6^*, III_4 и свойством 4^0 § 3.

18. Указание. Рассмотреть два случая: а) фигура F_1 содержит хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой; б) все точки фигуры F_1 лежат на одной прямой. В случае б) воспользоваться задачами 17 и 16.

19. Указание. Воспользоваться аксиомами III_7, III_6^* и свойством 3^0 § 3.

20. Указание. а) воспользоваться теоремой 1 § 4 и аксиомой III_3; б) доказать методом от противного, воспользовавшись задачей 21 [7].

21. Указание. Пусть A, B, C, D — данные точки, $B = f(A)$, где f — данное наложение. Воспользовавшись задачей 11, рассмотреть два случая: а) $A = f(B)$; б) $C = f(B)$ или $D = f(B)$.

22. Указание. Сначала доказать, что при данном наложении $M \to M$, $N \to N$, и воспользоваться свойством 4^0 § 3.

23. Указание. Воспользоваться задачей 74 [7].

24. Указание. Пользуясь аксиомой III_6^*, сначала доказать, что существует наложение, при котором $\alpha \to \alpha'$. Затем воспользоваться тем, что в плоскости α' имеют место соответствующие признаки равенства треугольников (см. п. 4 § 3).

25. Указание. См. указание к задаче 24.

26. Указание. Воспользоваться задачей 24 и свойством 4^0 § 3.

27. Указание. Если данные точки не лежат в одной плоскости, то на продолжении луча CD отложить отрезок CD', равный отрезку CD, и, пользуясь задачами 24 и 25, доказать, что $\Delta CMD = \Delta CMD'$.

28. Указание. Сначала доказать, что треугольники AMD и M_1MM_2 подобны, где M — середина отрезка BC.

29. Указание. Сначала доказать, что прямые BB_1 и CC_1 совпадают или параллельны. Каждый из этих случаев рассмотреть отдельно.

30. Указание. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

31. Указание. Пусть в данной плоскости α выполняется условие задачи. Доказать методом от противного, что в любой другой плоскости β выполняется аксиома параллельных прямых. Для этого рассмотреть наложение f такое, что $\beta = f(\alpha)$.

32. Указание. Доказать методом от противного, воспользовавшись леммой § 7.

33. Указание. См. указание к задаче 32.

35. Указание. Воспользоваться свойством 3^0 § 7.

36. Указание. Воспользоваться задачей 34а и леммой § 7.

38. Указание. Воспользоваться свойством 2^0 § 7.

41. Указание. Воспользоваться свойством 1^0 и теоремой 2 § 8.

43. 10 см, 15 см.

45. Указание. Воспользоваться теоремой 2 § 1 и теоремой 2 § 8.

48. Прямые m и BC: а) пересекаются; б) являются скрещивающимися прямыми.

50. Искомая прямая существует только в том случае, когда точка A не лежит в параллельных плоскостях, проходящих соответственно через прямые a и b. Указание. Воспользоваться теоремой 2 § 9.

51. Искомая прямая существует только в том случае, когда прямая c пересекает параллельные плоскости, проходящие соответственно через прямые a и b.

52. Указание. Воспользоваться теоремой 2 § 9.

54. Указание. Воспользовавшись задачей 53, доказать, что данные три плоскости имеют общую точку.

57. 2 : 3. Указание. Доказать, что прямые PP' и QO' параллельны.

58. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 9.

60. Указание. Применить теорему 1 § 9 к плоскости, проходящей через точку M и прямую a, и к одной из прямых, проходящих через точку M.

62. Указание. Через точку пересечения данной прямой и плоскости, перпендикулярной к ней, провести прямую, параллельную второй данной прямой.

64. Указание. Через произвольную точку той из данных плоскостей, которая перпендикулярна к плоскости α, провести прямую, перпендикулярную к α. Затем воспользоваться теоремой 1 § 12.

65. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 12.

67. Указание. Доказать методом от противного, воспользовавшись свойством 3^0 § 12.

69. Нет (нет). Указание. Доказать методом от противного.

70. Указание. Через точку A провести прямую, параллельную данной прямой и воспользоваться леммой § 11.

71. Указание. Воспользоваться теоремами 1 и 2 § 13.

72. Указание. Воспользоваться задачами 53 и 70.

73. Указание. Воспользоваться леммой § 11 и задачей 70.

74. Обозначим через β плоскость, параллельную как прямой a, так и прямой b. Если $\beta \perp \alpha$, то искомое множество — пучок параллельных прямых с плоскостью α, если плоскости α и β не перпендикулярны — пустое множество.

76. Указание. Рассмотреть два случая: а) прямые O_1A_1 и O_2A_2 различны. Воспользоваться задачей

75; б) прямые O_1A_1 и O_2A_2 совпадают. Сначала доказать, что два луча одной прямой противоположно направлены тогда и только тогда, когда на каждом из них существует точка, не принадлежащая другому лучу.

77. Указание. Если прямые O_1A_1, O_2A_2 и O_3A_3 не лежат в одной плоскости, то воспользоваться задачей 75. В противном случае ввести в рассмотрение еще один луч OA, сонаправленный с одним из данных лучей.

78. Указание. Рассмотреть луч O_2A_2', дополнительный к лучу O_2A_2, и воспользоваться задачами 76 и 77.

79. Указание. Воспользоваться задачей 78 и теоремой 1 § 10.

80. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 10 и задачей 75.

81. Указание. Через произвольную точку плоскости, проходящей через прямые a и b, провести прямые соответственно параллельные прямым a' и b' и воспользоваться теоремой 2 § 21 [7].

82. Указание. Воспользоваться задачей 80.

84. а) плоскость, параллельная данным прямым, относительно которой данные прямые симметричны; б) две перпендикулярные плоскости, проходящие через биссектрисы углов между данными прямыми и перпендикулярные плоскости данных прямых.

85. Плоскость, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная к нему, где AB — перпендикуляр из точки A данной прямой к данной плоскости.

88. Указание. Пусть $A_1A_2 \ldots A_6$ — данный шестиугольник плоскости α, а $P_1, P_2, \ldots, P_6$ — точки, в которых его стороны A_1A_2, A_2A_3, ..., A_6A_1 касаются вписанной окружности. Отрезок B_iA_i, равный отрезку A_iP_i,— перпендикуляр, проведенный к плоскости α (здесь $i = 1, 2, \ldots, 6$), причем точки B_1, B_3 и B_5 лежат по одну сторону от этой плоскости, а точки B_2, B_4 и B_6 — по другую сторону. Доказать, что $B_1B_2 \ldots B_6$ — искомый шестиугольник. Для доказательства теоремы Брианшона воспользоваться задачей 2.

90. Указание. Через точку B провести прямые, параллельные данным прямым, и воспользоваться задачей 87.

91. Указание. Сначала доказать, что данная прямая пересекает плоскость ABC. Затем применить метод от противного, воспользовавшись задачей 90.

93. а) $\frac{1}{2}(a + b)$; б) $\frac{1}{2}(a - b)$.

94. $\frac{1}{3}(a + b + c)$. Указание. Воспользоваться задачей 93.

95. Искомой плоскостью является любая плоскость, перпендикулярная к прямой b. Перпендикуляры лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $a \perp b$. Указание. Воспользоваться задачей 63.

96. Указание. б) воспользоваться задачей 95.

97. Указание. Воспользоваться задачей 81.

99. $\cos\theta = \cos\psi \cdot \sin\varphi$.

103. 8 см. Указание. Сначала, пользуясь задачей 86а, доказать, что M_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

104. $\frac{\sqrt{6}}{8}a$.

105. 60°.

106. 15°, 75°, 90°.

107. $\sin\theta = \frac{2}{3}$.

108. $\frac{\sqrt{3} \pm 1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$. Указание. Провести перпендикуляры AA_2 и BB_2 к плоскости α и рассмотреть два случая в зависимости от того, лежат ли точки A_1 и B_1 по одну сторону или по разные стороны от прямой A_2B_2.

109. 30°.

112. Указание. а) воспользоваться задачей 3.

113. Указание. Воспользоваться задачей 26а.

116. а) параллельны; б) параллельны; в) пересекаются; г) пересекаются; д) пересекаются. Указание. г), д) воспользоваться леммой § 7.

117. б) доказать методом от противного.

120. Указание. Воспользоваться свойством 2^0 § 15.

121. а) нет; б) да; в) нет.

122. а) $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{15}$; в) $\cos\theta = \frac{3\sqrt{65}}{65}$.

123. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; б) $\frac{\sqrt{6}}{6}a$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ и a. Указание. Воспользоваться задачей 110.

124. $\operatorname{tg}\theta = \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$. Указание. Воспользоваться задачей 114.

126. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

127. 60°.

128. Указание. Рассмотреть два случая: $m_1 = h_1$ и $m_1 \neq h_1$.

129. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; б) $\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

130. $\frac{\sqrt{70}}{35}a$. Указание. Учесть, что искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями AMP и NDK, где K — точка ребра BC, а P — точка ребра BD.

131. Указание. Рассмотреть плоскость, симметричную плоскости α относительно плоскости β.

132. Указание. Рассмотреть образ точки B при отражении от плоскости α.

133. Указание. Рассмотреть параллельный перенос на отрезок $\overline{PQ}$ и воспользоваться задачей 132.

134. Указание. Воспользоваться задачей 133.

136. Указание. Доказать методом от противного, используя задачу 1 § 11.

137. Указание. Воспользоваться аксиомой III_6 и задачей 136.

138. Указание. Воспользоваться задачей 137.

140. Указание. а) воспользоваться задачей 138; б) воспользоваться задачей 137.

141. Указание. Учесть, что середина отрезка AB является неподвижной точкой.

142. Указание. Воспользоваться задачей 141.

143. Указание. Воспользоваться задачей 140а.

144. Указание. Учесть, что при данном движении каждый из лучей AB и BA переходит в себя, и воспользоваться аксиомой III_5.

146. а) плоскость α и любая плоскость, перпендикулярная к ней; любая прямая, лежащая в плоскости α или перпендикулярная к ней; б) любая плоскость, проходящая через прямую a или перпендикулярная к ней; прямая a и любая прямая, пересекающая ее под прямым углом; в) любая плоскость и любая прямая, проходящая через точку O; г) любая плоскость, параллельная прямой AB или проходящая через нее; прямая AB и любая прямая, параллельная ей.

147. а) любая плоскость, перпендикулярная к прямой a и прямая a; б) при $\varphi = 180^\circ$ любая плоскость, проходящая через a и прямая a, а при $\varphi \neq 180^\circ$ только прямая a; в) плоскость α и любая плоскость, перпендикулярная к α и параллельная AB или любая прямая плоскости α, параллельная AB; г) плоскость α и прямая a. Указание. г) воспользоваться задачей 145.

148. а) параллельный перенос; б) поворот вокруг прямой a; в) винтовое движение с осью a; г) отражение от плоскости α; д) скользящее отражение с плоскостью α; е) поворотное отражение с осью a и плоскостью α.

149. Указание. Воспользоваться аксиомой III_4, теоремой 1 § 23 [7]. и теоремой 1 § 3.

150. Указание. Воспользоваться задачей 137 и леммой § 5.

151. Указание. Воспользоваться задачами 137 и 149.

152. Указание. Рассмотреть отражение от прямой, проходящей через середины ребер AB и DC.

153. Указание. Рассмотреть отражение от прямой PQ.

154. Указание. Рассмотреть отражение от прямой, содержащей биссектрису угла, и воспользоваться задачей 135а.

155. Указание. Рассмотреть отражение от прямой c.

156. Указание. Воспользоваться задачей 137.

158. Указание. Воспользоваться задачами 70 и 252 [7].

159. Указание. Рассмотреть образ данной прямой при симметрии относительно данной точки.

160. Указание. Воспользоваться задачей 159.

161. Указание. Рассмотреть поворот на 120° вокруг прямой, перпендикулярной к четвертой грани тетраэдра и проходящей через противоположную вершину.

162. Указание. Воспользоваться теоремой § 18.

163. Указание. Воспользоваться задачей 162.

164. Указание. Воспользоваться задачей 163а.

167. Указание. б) воспользоваться теоремой 1 § 19, свойством 1^0 § 19 и аксиомой III_4.

169. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 19 и задачей 137.

170. Указание. Искомое подобие представить в виде gh, где h — гомотетия, а g — параллельный перенос.

171. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 10 или задачей 78, а также задачами 164, 165 и 169.

172. Указание. Воспользоваться задачей 171.

173. Указание. Воспользоваться задачами 168а и 167б.

174. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 23 [7].

175. Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в точке O и воспользоваться задачей 167а.

176. Указание. Воспользоваться задачами 169 и 173.

177. Указание. Воспользоваться задачами 169 и 174.

178. Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в данной точке и коэффициентом λ.

180. Указание. Воспользоваться задачей 173.

181. 3,5 см.

182. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2 + 3h^2}$; б) $\frac{3ah}{2\sqrt{a^2 + 3h^2}}$.

183. $\frac{5}{6}a$; $\frac{5}{6}b$; $\frac{5}{6}b$.

184. Указание. Сначала доказать, что $\frac{XM}{AX} + \frac{YM}{BY} + \frac{ZM}{CZ} = 1$, где X, Y и Z — точки пересечения прямых AM и BC, CM и AB. Затем, используя подобие треугольников, вывести искомую формулу.

186. 45°.

187. Указание. Воспользоваться задачами 6 и 5.

188. Да, любая плоскость, перпендикулярная к ребру двугранного угла. Указание. Воспользоваться задачей 137.

191. Указание. Воспользоваться задачей 188 и теоремой 1 § 17.

192. Указание. Воспользоваться задачами 191 и 106.

193. $180° - \varphi$. Указание. Воспользоваться теоремой 2 § 21 [7].

194. Указание. Воспользоваться задачами 188 и 189.

195. Указание. Воспользоваться задачей 188.

196. Указание. а) воспользоваться теоремой 1 § 20; б) воспользоваться задачей 169.

197. Указание. Воспользоваться задачами 189 и 187.

198. Указание. Доказать методом от противного.

199. Указание. Пусть $SA_1A_2 \dots A_n$ — данный многогранный угол, и плоскости $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, ..., $A_1A_2A_n$ не совпадают. Рассмотреть ту грань наименьшего из всех двугранных углов $S \cdot A_1A_2 \cdot A_3$, $S \cdot A_1A_2 \cdot A_4$, ..., $S \cdot A_1A_2 \cdot A_n$, которая не содержит точку S.

201. Указание. Воспользоваться задачами 199 и 200.

203. Указание. а) доказать методом от противного; б) воспользоваться задачами 201 и 200.

204. Указание. Воспользоваться задачами 199, 203 и задачей 137 [7].

205. Указание. Воспользоваться задачами 204, 199 и 139 [7].

206. Указание. Использовать плоскость, проходящую через две прямые, по которым пересекаются плоскости противоположных граней данного четырехгранного угла.

207. Указание. Доказать методом математической индукции, используя теорему 4 (1^0) § 21 и задачу 205.

208. Указание. Доказать методом математической индукции, используя теоремы 4 (3^0) § 21.

209. Указание. Доказать методом математической индукции, используя теорему 4 (2^0) § 21 и задачу 205.

210. Указание. Доказать сначала, что биссектральные полуплоскости двух двугранных углов данного трехгранного угла имеют хотя бы одну общую точку, затем воспользоваться задачами 195 и 187.

211. Указание. На общем ребре непрямых плоских углов данного трехгранного угла с вершиной S взять точку A и провести через нее секущую плоскость, перпендикулярную к SA.

212. Указание. Воспользоваться задачей 194.

215. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов для трехгранных углов.

216. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов и теоремой, двойственной теореме косинусов для трехгранных углов.

217. Указание. Воспользоваться задачами 197 и 216.

218. Указание. Воспользоваться леммой § 21.

219. Указание. Воспользоваться теоремой 4 (1^0) § 21 и задачей 190.

220. Указание. Воспользоваться задачей 89.

221. Указание. На ребрах трехгранного угла с вершиной S отложить единичные отрезки SA, SB, SC. По теореме косинусов через линейные углы трехгранного угла выразить $\cos \widehat{MSN}$, $\cos \widehat{NSP}$, $\cos \widehat{PSM}$, где M, N, P — середины отрезков AB, BC, CA.

222. Указание. Воспользоваться теоремой, двойственной теореме косинусов для трехгранных углов.

223. $\sin \hat{A} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Указание. Воспользоваться теоремой синусов для трехгранных углов.

224. $\cos \widehat{ASC} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

225. 120°.

226. 90°.

227. $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2}$.

228. Указание. Воспользоваться леммой § 21 и теоремой (4^0) § 22.

229. Указание. Воспользоваться леммой § 21.

230. Указание. а) методом от противного доказать, что $\angle ASB = \angle A_1S_1B_1$, и воспользоваться теоремой (2^0) § 22; б) воспользоваться задачей 228.

231. Указание. Сначала доказать, что центром данной окружности является точка пересечения плоскости окружности с прямой, проходившей через центр сферы и перпендикулярной к этой плоскости.

232. Указание. Воспользоваться задачами 231 и леммой § 23.

234. Указание. Воспользоваться задачами 231 и леммой § 23.

236. Указание. Через середину отрезка CD провести плоскость β, перпендикулярную к CD, и доказать, что плоскость β проходит через середину отрезка BC.

237. Указание. Доказать, что указанная в задаче сумма квадратов равна $4R^2$, где R — радиус сферы.

238. Сфера с диаметром AB.

239. $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

240. $\sqrt{R^2 - r_1^2} \pm \sqrt{R^2 - r_2^2}$.

242. Указание. Используя теорему 4 § 46 [7], сначала доказать, что концы каждых двух из указанных в задаче трех отрезков лежат на одной окружности. Затем воспользоваться задачей 233а.

243. Указание. Рассмотреть симметрию относительно плоскости, проходящей через центры трех сфер.

244. $\frac{R}{3}$.

245. $\frac{ab}{2c}, \frac{ac}{2b}, \frac{ac}{2b}$.

246. $2 - \sqrt{3}$.

250. Указание. Воспользовавшись задачей 249б, доказать, что существует движение, при котором центр данной сферы переходит в себя, а точка A — в точку B.

251. Указание. Воспользоваться задачами 137 и 249б.

252. Указание. Сначала доказать, что искомое множество содержит хотя бы одну точку.

253. Указание. Воспользоваться задачей 251.

254. Указание. Учесть, что точки A, B и центр сферы являются неподвижными точками наложения (движения), которое порождает данное сферическое наложение.

255. Указание. Учесть, что наложение (движение), порождающее $\hat{f}$, имеет хотя бы одну неподвижную точку, и воспользоваться теоремой § 18.

256. Указание. Применить теорему 4 (1^0) § 21 к центральному трехгранному углу, который соответствует данному сферическому треугольнику.

257. Указание. Применить утверждение задачи 216 к центральному трехгранному углу, который соответствует данному сферическому треугольнику.

258. Указание. Применить утверждение задачи 217 к центральному трехгранному углу, который соответствует данному сферическому треугольнику.

259. Указание. Воспользоваться сферической теоремой косинусов, сферической теоремой, двойственной теореме косинусов, и сферической теореме синусов.

262. Указание. б) доказать методом от противного.

263. Указание. а) воспользоваться предложением Дедекинда (§ 72 [6], ч. II; б) использовать предложение а).

264. Указание. Воспользоваться задачей 263а.

265. Указание. Пусть A и B — данные точки, $A - M - B$, A — внутренняя точка тела G, а Ω — окрестность точки A, все точки которой принадлежат G. Рассмотреть образ окрестности Ω при гомотетии с центром B, при которой точка A переходит в точку M.

269. Указание. Воспользоваться свойством 3^0 § 26 и леммой § 27.

270. Указание. Доказать, что пересечение всех полупространств данной многогранной поверхности F есть ограниченная область с границей F, и воспользоваться теоремой § 26.

271. Указание. Воспользоваться задачами 268 и 265.

272. Указание. Использовать сечение фигуры $\bar{F}$ плоскостью, проходящей через данную прямую.

273. Указание. Воспользоваться задачей 272.

274. Указание. Использовать идею доказательства теоремы 1 § 28.

275. Указание. Воспользоваться теоремами 1 и 2 § 28.

278. Указание. Воспользоваться следствием 2^0 теоремы § 27 и доказать, что указанные в задаче прямые проходят через точку пересечения прямых, содержащих высоты тетраэдра.

279. Указание. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения медиан граней BCD и ACD тетраэдра $ABCD$. Доказать, что ABA_1B_1 — трапеция, и применить к ней задачу 1 § 42 [7].

280. Указание. Учесть, что точка O принадлежит биссектральной полуплоскости каждого из двугранных углов данного тетраэдра.

281. Указание. а) воспользоваться теоремой 1 § 33 и задачей 1 § 11; б) воспользоваться задачей а).

282. Указание. Доказать сначала, что противоположные ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны.

283. Указание. Воспользоваться задачей 282, теоремой 2 § 13.

285. Указание. Воспользоваться задачей 284.

287. Указание. Воспользоваться свойством 1^0 § 27, сначала доказать, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Затем рассмотреть поворот на 120° вокруг прямой, содержащей высоту тетраэдра.

288. а) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{3}$; в) $\arccos\frac{1}{3}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

291. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3\cos\alpha}(\sqrt{3\sin^2\alpha + 1} + 1)$. 1). Указание. Воспользоваться задачей 290.

292. Указание. Использовать симметрию относительно точки пересечения диагоналей данного параллелепипеда.

293. Указание. См. указание к задаче 292.

294. Указание. Воспользоваться задачей 292.

295. Указание. б) воспользоваться теоремой 2 § 33.

296. Указание. Пусть P' и Q' — середины отрезков AQ и A_1P. Сначала доказать, что $PP' \perp AA_1Q$ и $QQ' \perp AA_1P$.

297. Указание. Воспользоваться идеей доказательства теоремы 1 § 29.

299. Указание. Воспользоваться задачей 282.

300. $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 = \sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

301. 45°.

302. Указание. Используя теорему 4 (1^0) § 21, рассмотреть сначала два частных случая: а) когда точка S' лежит на одном из боковых ребер пирамиды $SABC$; б) когда S' — внутренняя точка одной из ее боковых граней.

303. Указание. Использовать идею доказательства теоремы 1 § 28.

304. Указание. Воспользоваться задачей 298.

305. Указание. Пусть плоскость сечения пересекает основания призмы по отрезкам M_1N_1 и M_2N_2. Разложить данную призму на две призмы плоскостью, проходящей через прямую M_1N_1 и параллельной боковому ребру. Применить к призме, на поверхности которой лежит отрезок M_2N_2, задачу 266 и воспользоваться результатом пункта 2 в) § 32.

306. Да. Указание. Рассмотреть различные случаи в зависимости от расположения секущей плоскости относительно вершины и основания пирамиды и воспользоваться теоремой § 32.

307. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Указание. Воспользоваться задачами 118, 83 и 293, доказать, что сечение проходит через середины шести ребер куба, и рассмотреть поворот вокруг прямой, содержащей данную диагональ куба, на угол 120°.

308. $k = 3, 4, 6$. Указание. Воспользоваться теоремой § 32 и учесть, что у правильного пятиугольника нет параллельных сторон.

309. Указание. Сначала доказать, что плоскость искомого сечения проходит через середины каких-то двух ребер, каждое из которых имеет общую вершину с данным ребром куба. Затем воспользоваться задачей 307.

310. $\frac{a^2\sqrt{15}}{2}$. Указание. Воспользоваться теоремой § 32.

311. $\frac{2a}{27}\sqrt{3(a^2 + 3h^2)}$.

312. $\frac{3}{4}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 294.

313. 3 см^2.

314. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 44.

315. Треугольник и пятиугольник. $\frac{8}{7}$. У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой § 32.

316. Шестиугольник; $\frac{25}{16}S$.

317. $\frac{3a^2\sqrt{6}}{50}$.

318. $\frac{7a^2\sqrt{6}}{16}$. У к а з а н и е. Учесть, что плоскость сечения параллельна одной из диагоналей куба и одной из диагоналей данной грани.

319. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 2 § 11 и задачей 232.

320. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 319 и леммой § 33.

322. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 1 § 11.

323. У к а з а н и е. Построить параллелепипед, ребрами которого являются отрезки DA, DB и DC, и воспользоваться задачей 293.

324. У к а з а н и е. Доказать, что если существует вписанная сфера, то ее центр принадлежит биссектральной полуплоскости каждого из двугранных углов данного многогранника.

325. У к а з а н и е. Доказать, что точка пересечения биссектральной полуплоскости двугранного угла пирамиды с ребром, содержащим какое-нибудь ребро основания, с высотой пирамиды является центром вписанной сферы. Затем воспользоваться задачей 324.

326. У к а з а н и е. Рассмотреть пирамиду, при сечении которой получена данная усеченная пирамида, и воспользоваться задачей 325.

330. У к а з а н и е. Доказать, что точка пересечения отрезков, каждый из которых соединяет вершину тетраэдра с центром противоположной грани, является центром вписанной и описанной сфер. Затем воспользоваться задачей 329.

331. Указание. Воспользоваться задачами 325 и 329.

332. $\frac{12}{25}$ см.

333. $1 + \frac{\sqrt{17}}{3}$. Указание. Учесть, что центры описанной и вписанной сфер лежат на высоте данной пирамиды.

334. 45°.

335. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{mn}}{m-n}$. Указание. Воспользоваться задачей 326.

337. Указание. Если точки H и G не совпадают, то рассмотреть точку H', симметричную точке H относительно G, и, пользуясь задачей 281а и задачей 1 § 11, доказать, что H' равноудалена от любых двух вершин тетраэдра.

338. Указание. Если точка H не совпадает с центром O описанной сферы, то, воспользовавшись задачей 337, доказать, что M лежит на луче HO, $HM = \frac{1}{3}HO$.

339. Указание. Через данную прямую провести плоскость, параллельную оси цилиндра или проходящую через ось.

340. Указание. Воспользоваться задачей 339.

341. Плоскость α, проходящая через середину высоты цилиндра параллельно его основаниям, является плоскостью его симметрии. Других плоскостей симметрии, кроме указанных в условии задачи и плоскости α, нет.

342. Указание. Воспользоваться теоремой § 34.

346. Указание. Пусть $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ — основания данных цилиндров. Сначала рассмотреть параллельный перенос на направленный отрезок, параллельный осям цилиндров, при котором круг $\bar{\omega}_2$ переходит в круг, расположенный в плоскости круга $\bar{\omega}_1$.

347. Указание. Воспользоваться задачей 372 [7].

348. Указание. Пусть γ — плоскость, в которой лежат основания цилиндров. Сначала рассмотреть случай, когда AB — прямая, по которой пересекаются плоскости α и γ.

349. $\frac{a(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{6}$. Указание. Использовать гомотетию с центром в вершине тетраэдра, при которой одна из плоскостей основания цилиндра переходит в другую.

350. $\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{2}$. Указание. б) сначала доказать, что $AO = C_1O_1$.

351. Указание. Воспользоваться признаком принадлежности точки цилиндру (п. 1 § 34) и задачей 137.

352. Указание. Воспользоваться признаком принадлежности точки цилиндру (п. 1 § 34) и задачей 169.

353. Указание. Воспользоваться задачей 273 и задачей 339.

354. Указание. а) рассмотреть сначала случай, когда ломаная, соединяющая точки M_1 и N_1, состоит из одного звена, и воспользоваться задачей 353; б) воспользоваться задачей 353; в) использовать прямые, проходящие через точки N_1 и N_2, пересекающие ось цилиндра или конуса и перпендикулярные к оси.

355. Указание. Использовать идею доказательства теоремы § 26 и воспользоваться задачей 354.

356. а) $2R \geqslant l\sqrt{2}$; б) $\varphi \geqslant 90°$.

357. Указание. Воспользоваться теоремой 4 (1^0) § 21.

358. Указание. Воспользоваться идеей доказательства теоремы § 34.

360. Указание. Рассмотреть симметрию относительно плоскости, проходящей через ребро двугранного угла и центр основания конуса, и воспользоваться задачей 341.

361. Указание. Сначала доказать, что оси конуса и цилиндра совпадают, а затем использовать сечения конуса и цилиндра плоскостью, проходящей через их общую ось.

363. 64 см^2.

364. $\cos\varphi$.

365. Указание. Рассмотреть две сферы, расположенные по разные стороны от данной плоскости, каждая из которых касается данной плоскости и цилиндрической поверхности.

366. Указание. Воспользоваться задачами 365 и 339.

367. $2r$; $\frac{2r}{\sin\varphi}$. Указание. Воспользоваться задачей 365 и использовать сечение цилиндрической поверхности плоскостью, проходящей через центр эллипса и перпендикулярной к оси цилиндрической поверхности.

368. $2h^2$; 45°. Указание. Воспользоваться задачей 356.

370. Указание. Рассмотреть поворот вокруг оси конуса.

372. Если угол в осевом сечении конуса не больше прямого, то — осевое сечение конуса, в противном случае — сечение, проходящее через две перпендикулярные образующие конуса. Указание. Воспользоваться задачами 356б и 371.

373. Указание. Сначала доказать, что существуют две сферы, расположенные по разные стороны от данной плоскости, каждая из которых касается данной плоскости и конической поверхности.

374. Указание. Воспользоваться задачами 373 и 339.

375. Указание. Воспользоваться задачами 354 и 266 и идеей доказательства теоремы § 26.

376. $\frac{Rl}{R-l}$; $\frac{R\sqrt{l^2-(R-r)^2}}{R-r}$.

377. 8 см; 128 см^2.

378. $(2r + l\cos\varphi)l\sin\varphi$.

379. $\frac{\pi h^2}{4}$ и $\frac{9\pi h^2}{4}$.

380. $\frac{\pi}{9}(2r+R)^2$, $\frac{\pi}{9}(2R+r)^2$.

381. 1140 см^2.

382. 10,5 см и 5,5 см.

383. $S\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

385. Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 351.

386. Указание. Воспользоваться идеей решения задачи 352.

389. $R\cos\varphi$, $\pi R^2\cos^2\varphi$.

390. Искомая плоскость проходит через прямую AB

и перпендикулярна к прямой OM, где OM — перпендикуляр к прямой AB.

391. 15 см. Указание. Сначала доказать, что плоскость сечения с меньшей площадью и центр шара лежат по разные стороны от другой плоскости сечения.

393. Указание. Воспользоваться задачей 266.

394. Указание. Воспользоваться задачей 169.

396. Указание. Воспользоваться задачами 395 и 249.

397. $\frac{h^2 + a^2}{2h}$; $\frac{ha}{a + \sqrt{h^2 + a^2}}$.

398. $\sqrt{\left(\frac{H^2 + r_1^2 - r_2^2}{2H}\right)^2 + r_2^2}$.

400. $\frac{3\sqrt{2}}{8}l$.

401. 3. Указание. Использовать гомотетию с центром в вершине данного конуса, при которой секущая плоскость переходит в плоскость основания конуса.

402. $2\sqrt{10 - \sqrt{10}}$ см.

403. Указание. Воспользоваться утверждением: сфера, вписанная в усеченный конус, является также сферой, вписанной в конус, от которого отсечен усеченный конус.

404. $2\sqrt{10}$ см. Указание. Воспользоваться задачей 403.

405. Указание. Воспользоваться задачей 151 и следствием 1 теоремы § 38.

407. 27. Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в точке пересечения отрезков, каждый из которых соединяет вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, и коэффициентом $m = -3$.

408. Все плоские углы при вершине пирамиды прямые.

410. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{s^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$.

411. Указание. Через вершины клина, не принадлежащие основанию, провести плоскости, перпендикулярные к прямой, проходящей через эти вершины.

413. Указание. Воспользоваться задачей 411.

414. $\frac{27}{5}$. Указание. Воспользоваться задачей 411.

415. $\frac{1}{3}$.

416. $\frac{na^2}{12}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}$.

417. Указание. Использовать задачи 284 и 415.

418. $\frac{5}{24}$ см^3. Указание. Воспользоваться задачей 417.

420. Указание. Воспользоваться задачей 419.

421. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

422. $2aR^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\sin\varphi$.

423. $\frac{a^3}{8}$.

424. $\frac{13}{23}$. Указание. Учесть, что плоскость A_1MN пересекает прямую AC в точке K, где C — середина отрезка AK, а отрезок AB — в точке P, $AP : PB = 2$. Рассмотреть разность объемов пирамид A_1APK и $MCNK$.

425. $\frac{abc}{ab+bc+ca}$.

426. $\frac{7}{48}a^3$. Указание. Воспользоваться задачами 118б, 293, 294 и 307.

427. Указание. Воспользоваться теоремой 4 § 41.

428. $\frac{4}{3}\pi\frac{h^3r^3}{(r+\sqrt{h^2+r^2})^3}$.

429. 27.

430. $\frac{(1+\sqrt{1+(k\pm 1)^2})^3}{4(k\pm 1)^2}$.

431. $V=\frac{\pi h}{3R}(R-r)^2(R+2r)$; $V'=\frac{2\pi r^3h}{3R}$. Указание. Рассмотреть гомотетию с центром в вершине конуса и с коэффициентом $k=\frac{r}{R}$.

432. $\frac{2\pi r}{3}(r^2+3r\pi R-3R^2)$.

433. $\frac{16}{3}$ см^3. Указание. Рассмотреть сечения фигуры плоскостями, параллельными осям цилиндров,

и вычислить объем тела с помощью определенного интеграла (см. § 40).

434. Указание. Использовать формулу для вычисления объема тетраэдра.

435. $\frac{\pi a^3}{9}(\sqrt{3}+1)^3$.

436. $\frac{2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{7}}$. Указание. Соединить центр вписанной в пирамиду сферы с вершинами пирамиды и выразить объем данной пирамиды через объемы четырех полученных пирамид.

437. $\frac{\pi}{18}$. Указание. Для доказательства существования цилиндра воспользоваться симметрией относительно прямой, проходящей через середины противоположных ребер тетраэдра.

438. $\frac{\pi\sqrt{2}}{48}(53-7\sqrt{3})$. Указание. Сначала доказать, что две вершины куба, принадлежащие основанию конуса, являются концами некоторого ребра куба, середина которого совпадает с центром основания конуса. Затем доказать, что центр куба лежит на высоте конуса.

439. $\frac{4}{3}(11-4\sqrt{2})$ см^3. Указание. Сначала доказать, что тело $\overline{F}$ есть объединение прямоугольного параллелепипеда и четырехугольной усеченной пирамиды с общим основанием Φ, где Φ — сечение куба плоскостью, параллельной плоскости основания пирамиды.

440. а) $\frac{9h^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\left(3-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right)+\frac{3l^2\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}}{4\sin\frac{\beta}{2}}$.

441. $a^2\,\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}$.

442. $\frac{1}{2}b^2\left(\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)$.

443. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

444. $2Q(2+\sqrt{2})$.

445. $a^2\left(\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}+1\right)$.

446. $h^2(6+2\sqrt{3})$.

447. $8(\sqrt{3}+3)$ см^2.

448. $\frac{2a^2}{\sin\frac{\beta}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

449. $\frac{a^2}{3}(\sqrt{15}+\sqrt{6})$. Указание. Воспользоваться задачей 290б.

450. $\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^2-b^2}{\cos\varphi}$. Указание. Воспользоваться задачей 304.

451. $\frac{2}{3}a^2(\sqrt{3}+\sqrt{6})$. Указание. Воспользоваться задачами 293 и 118б.

452. $4Q\operatorname{ctg}\varphi$.

453. $\frac{p}{4}$; $\frac{p}{2}$.

454. $a^2(2\sqrt{3}+6\pi)$.

455. $60°$.

456. $\frac{\pi a^2(\cos\varphi+1)}{4\sin^2\alpha\cdot\cos\varphi}$.

457. $\pi h^2(2+\sqrt{6})$.

458. $\frac{2}{3}\pi h^3$. Указание. Пусть SO — высота конуса, а SA и SB — перпендикулярные образующие. Используя поворот вокруг прямой SO, сначала доказать, что $\widehat{AOB}=120°$.

459. $60°$.

460. $30°$.

461. $\pi(462\sqrt{3}+657)$ см^2.

462. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

463. $\frac{R}{2}$; $\frac{h}{2}$. Указание. Сначала доказать, что оси конуса и цилиндра совпадают.

464. $\frac{\pi a^2\sqrt{5}}{8}$. Указание. Сначала доказать, что боковые поверхности данных конусов пересекаются по окружности радиуса $\frac{a}{4}$, центр которой совпадает с центром куба.

466. $\frac{2}{3}$.

467. Указание. Рассмотреть осевое сечение конуса.

468. $\cos\alpha = \frac{2n - 1 \pm 2\sqrt{n(n-2)}}{1 + 4n}$. Указание. Воспользоваться задачей 467.

469. πl^2.

470. 3. Указание. Воспользоваться задачей 330.

471. а) $\frac{\pi a^2}{2}$; б) $\pi a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Указание. Воспользоваться свойством 2^0 § 27 и задачей 279.

472. $\frac{Q}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}$ и $\frac{Q}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$.

473. $\frac{2\pi R^2}{a}(a \pm R)$. Указание. Воспользоваться задачей 399.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть II. Стереометрия. М.: Учпедгиз, 1952.
2. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия для 9—10 классов. М.: Просвещение, 1988.
3. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия для 10—11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1992.
4. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия. М.: Просвещение, 1961.
5. Атанасян Л. С. Основания школьного курса стереометрии. М.: Прометей, 1992.
6. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Часть I. М.: Просвещение, 1986; Часть II. М.: Просвещение, 1987.
7. Атанасян Л. С., Денисова Н. С., Силаев Е. В. Курс элементарной геометрии. Часть I. Планиметрия. М.: Сантакс-Пресс, 1996.
8. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Киселева Л. С., Позняк Э. Г. Геометрия. Учебник для 10—11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1992 и последующие издания.
9. Барыбин К. С. Сборник геометрических задач на доказательство. М.: Учпедгиз, 1952.
10. Вересова Е. Е., Денисова Н. С., Полякова Т. Н. Практикум по решению математических задач. М.: Просвещение, 1979.
11. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по решению математических задач. М.: Просвещение, 1985.
12. Киселев А. И. Элементарная геометрия. М.: Просвещение, 1980.
13. Лоповок Л. М. Сборник задач по стереометрии. М.: Учпедгиз, 1959.
14. Моденов П. С. Сборник задач по элементарной математике. М.: Советская наука, 1957.
15. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии. Часть II. Геометрия в пространстве. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
16. Погорелов А. В. Геометрия 7—11. М.: Просвещение, 1992.
17. Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.
18. Стратилатов П. В. Сборник задач по тригонометрии. М.: Учпедгиз, 1961.
19. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Стереометрия. М.: Наука, 1984.
20. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том I. М.: Наука, 1964.
21. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. М.: ГИТТЛ, 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ

АТАНАСЯН Левон Сергеевич,
ДЕНИСОВА Наталья Серафимовна,
СИЛАЕВ Евгений Васильевич

КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Часть II

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Редактор Л. Атанасян
Технический редактор Ф. Гольдштейн
Корректор С. Ковалёва

Подписано в печать 16.12.96. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага типографская № 2. Печать офсетная. Гарнитура «Школьная». Усл. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 17,4. Тираж 15000 экз. Заказ № 6509. С 061. Издательство "Сантакс-Пресс", 300058, г. Тула, ул. Кирова, 173-а (ЛР № 063773 от 21.12.94 г.).
Телефоны для реализации (095) 268-25-44, (0872) 41-06-37.
Отпечатано в типографии издательства «Самарский Дом печати», 443086, г. Самара, проспект К. Маркса, 201.